République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique- Université Cheikh Larbi Tebessi-Tebessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de La Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et d'Informatique

COURS D'ANALYSE COMPLEXE

Pour La Licence 2

Rouar Salim

2017-2018

Table des matières

Avant-propos

L' **Analyse complexe** ou la théorie des fonctions d'une variable complexe, est l'une des branches les plus utiles des mathématiques, cette théorie reçut des bases solides au $19^{\text{ème}}$ siècle grâce aux travaux de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Gauss et autre célébres mathématiciens.

L' **Analyse complexe** constitue une partie essentielle du bagage mathématique des mathématiciens, ingénieurs, physiciens et autres scientifiques.

Ce polycopié contient la matière du cours " **Analyse complexe** " qui j'ai enseigné pendant les années 2013-2018 aux étudiants de $2^{\text{ème}}$ **année mathématiques à l'université de Tebessa.**

En ce qui concerne la structure du contenu, le polycopié comporte cinq chapitres ordonés comme suit :

- **Rappels et préliminaires.**

- Séries entières, fonctions analytiques et fonctions élémentaires.

- Fonction holomorphes.

-Intégration des fonctions complexes.

- Singularité, théorème des résidus et ses applications.

Parmi les nombreux ouvrages publiés sur l'analyse complexe, on cite quelques importants ouvrages à la fin de ce polycopié, pour une extrapolation informationnelle.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

1.1 Rappels sur les nombres complexes

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ deux couples de réels et définissons leur produit $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2)$ par

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Ce produit définit une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$, et on obtient

$$i = (0, 1) \text{ et } 1 = (1, 0)$$

On a les propriétées suivantes :

. $(x, y) \times (1, 0) = (1, 0) \times (x, y) = (x, y)$ (1 est un élément neutre pour ce produit)

. $i^2 = i \times i = (1-, 0) = -1$, de sorte que i peut être vu comme une racine carrée de l'unité.

On identifie par la suite les points du plan $\mathbb{R}^2$: (x, y) à $z = x + iy$, et l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est exactement l'ensemble $\{z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi le produit des nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ est le nombre complexe

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Le **conjugué** de $z = x + iy$ est, par définition, le nombre complexe $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = x - iy$. L'écriture $z = x + iy$, x et y sont réels, est unique (car 1 et i forment une famille libre sur $\mathbb{R}$)

. x et y sont appellent, respectivement, parties réelle et imaginaire de z, on les note :$x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

. Un nombre complexe est dit réel si et seulement sa partie imaginaire est nulle.

.Un nombre complexe est dit imaginaire pur, si et seulement si sa partie réelle est nulle.

. Le nombre complexe 0 est, par définition, le nombre complexe de parties réelle et imaginaire nulles.

. On note que

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \ \ \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$$

. La **somme** des nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ est, par définition,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

. Le **produit** de z par le réel λ est le nombre comlexe

$$\lambda z = \lambda x + i\lambda y$$

Ainsi, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et l'application

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$$

est un **isomorphisme** et donc $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension deux (une base étant formée par $1, i$).

. $\mathbb{C}$ muni de son produit et de son addition est aussi un **corps commutatif,** ce qui signifie que :

1)- $(\mathbb{C}, +)$ est un **groupe commutatif** (son neutre étant le nombre complexe 0).

2)-Notant $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un **groupe commutatif** (son neutre étant le nombre complexe 1), et **l'inverse** de $z = x + iy \neq 0$ étant $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2}$.

3)- La **multiplication** est **distributive** pour l'addition (à gauche et à droite), c-à-d, on a

$$z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \ \ (z_1 + z_2)\,z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Notons que pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $z\overline{z} = x^2 + y^2$ est donc réel et positif, le module de z est alors défini par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

qui représente la distance (euclidienne) de (x, y) à l'origine dans le plan.

L'ensemble des nombres complexes de module 1 se note S^1, c'est l'ensemble des nombres complexes de la forme $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, c'est un **groupe** pour la multiplication ($1 \in S^1$ est l'inverse de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$).

. L'application $\theta \in \mathbb{R} \rightarrow e^{i\theta}$ est $2\pi-$périodique, et c'est un **morphisme de groupes** entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(S^1, \times)$ au sens où

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2}$$

En effet,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i\,(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} &= \left(\cos\left(\theta_1\right)+i\sin\left(\theta_1\right)\right)\left(\cos\left(\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_2\right)\right) \\ &= \cos\left(\theta_1\right)\cos\left(\theta_2\right)-\sin\left(\theta_1\right)\sin\left(\theta_2\right)+i\left(\sin\left(\theta_1\right)\cos\left(\theta_2\right)+\sin\left(\theta_2\right)\cos\left(\theta_1\right)\right) \end{aligned}$$

Notons aussi que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $(-i) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$,ainsi que les formulles :

Formulle de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right),\ n \in \mathbb{Z},\, \infty \in \mathbb{R}$$

Formulle d'Euler :

$$\cos\left(\theta\right) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \ \sin\left(\theta\right) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\frac{z}{|z|} \in S^1$ et donc z peut s'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = |z| > 0$ et pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, le nombre θ n'est pas défini que modulo 2π, et s'appelle un **argument** de z.Il repréente géométriquement l'angle entre l'axe des réels et de celui engendré par z.

L'argument d'un nombre complexe n'étant défini qu'à un multiple de 2π près, nous chercherons par la suite à en détermuner une (ou des) représentation continue (s),notions que l'argumentn'est pas défini (même modulo 2π) au point 0 et par conséquent pour construire des déterminations continues de l'argument, il faudra se placer sur des domaines ne contenant pas l'origine. La représentation $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ s'appelle factorisation polaire de $z \in \mathbb{C}^*$.

Racines des polynômes complexes

Par construction $i^2 = -1$, c'est- à - dire que l'équation polynômiale $z^2 + 1 = 0$ admet les deux complexes i et $-i$ tandis qu'elle n'admet pas de racines réelles.

L'un des principaux intérêts des nombres complexes réside dans la résolution d'équations polynômiales.

On a le théorème fondamental suivant

Théorème 1.1 *(Théorème de D'alember- Gauss)*
Soit P un polynôme complexe non constant $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $(\ a_k \in \mathbb{C},\ n \geq 1, a_n \neq 0)$, *alors* P *possède au moins une racine complexe.*

Corollaire 1.1 *Tout polynôme complexe de degré* n *posséde* n *racines (comptées avec leur multiplicité).*

1.2 Topologie de $\mathbb{C}$

Avec l'identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, le module d'un nombre complexe $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ correspond à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
Elle fait de $\mathbb{C}$ un espace normé, la distance entre deux nombres complexes est ainsi $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.
Les concepts de convergence, limites, convergence uniforme, ensembles ouverts et fermés, compacité, ..., sont les mêmes qu'en topologie et n'on donc pas besoin d'êtres répétés.

Définition 1.1 *Soit $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.*
*1- On appelle **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon r, l'ensemble*

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$$

*2- On appelle **disque fermé** de centre z_0 et de rayon r, l'ensemble*

$$\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$$

*3- ON appelle **cercle** de centre z_0 et de rayon r, l'ensemble*

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$$

Définition 1.2 *- Une partie $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite **ouverte** si et seulement si pour tout point $z \in \Omega$, il existe un disque ouvert centré en z et tout entier inclus dans Ω.*
*- On dit que z_0 appartient à l'**interieur** de la partie $D \subset \mathbb{C}$, si et seulement si, il existe un ouvert D tel que $z_0 \in \Omega \subset D$. Et on note $z_0 \in Int(D)$.*
*- Soit $a \in \mathbb{C}$, une partie v de $\mathbb{C}$ est un **voisinage de** a si et seulement si v contient un ouvert contenant a.*
L'ensemble des voisinages de a est noté $V(a)$.
*- Une partie A de $\mathbb{C}$ est un **voisinage de** ∞ si et seulement son complémentaire est borné.*
*- Une partie est dite **fermée** si son complémentaire est un ouvert.*

Remarque 1.1 *Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.*

Notion de connexité

La notion de connexité est une notion trés important, intuitivement un ensemble connexe est un ensemble " **d'un seul tenant**"

Définition 1.3 *Soit (Ω, d) un espace métrique, on dit que Ω est **connexe** si et seulement si les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de (Ω, d) sont Ω et $\emptyset$.*

Exemple 1.1 *Soit D_1 et D_2 deux disques disjoints ouverts, alors la réunion $D = D_1 \cup D_2$ n'est pas connexe.*
En effet, D_1 est un ouvert dans D, et D_1 est aussi fermé (puisque son complémentaire D_2 est un ouvert dans D)

On a la caractérisation suivante qui permet de mieux visualiser la notion de connexité :

Proposition 1.1 *Soit (Ω, d) un espace métrique, les assertions suivantes sont équivalentes :*
***1)-** (Ω, d) est connexe.*
***2)-** Toute application continue de Ω dans $\{0,1\}$ est constante. ($\{0,1\}$ muni par exemple de la distance usuellle de $\mathbb{R}$)*

Définition 1.4 ***(Connexité par arcs)*** *Soit (Ω, d) un espace métrique, on dit que Ω est **connexe par arc** si et seulement si pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega^2$, il existe $\gamma \in C^0([0,1], \Omega)$ tel que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$.*

Proposition 1.2 *Tout espace métrique connexe par arc est connexe.*

Définition 1.5 ***(Domaine)*** *On appelle domaine de $\mathbb{C}$ toute partie D non vide, ouverte et connexe du plan complexe.*

1.3 Fonction d'une variable complexe

1.3.1 Dénition des fonctions complexes

Définition 1.6 *On dit q'une **fonction** $w = f(z)$ est définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$, si à chaque point $z \in \mathbb{C}$, on associe **une** (la **fonction** est alors **uniforme**) ou **plusieurs** (la **fonction** est dite **multiforme**) valeurs de w.*

Soient Ω et $\grave{\Omega}$ deux ensembles de $\mathbb{C}$, soit $f : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ une fonction complexe. nous pouvons ainsi identifier $z = x + iy \in \Omega$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(z) \in \widetilde{\Omega}$, avec $(u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ et arriver à deux fonctions réelles $u(x,y), v(x,y)$ de deux variables réelles x et y telles que $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Exemple 1.2 *Soit $w = z^3 - i\bar{z}$, on pose $z = x + iy$, $w = u + iv$ et l'on obtient*

$$u + iv = (x+iy)^3 - i(x - iy) = \left(x^3 - 3xy^2 - y\right) + i\left(3x^2y - y^3 - x\right)$$

donc

$$\begin{cases} u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - y \\ v(x,y) = 3x^2y - y^3 - x \end{cases}$$

1.3.2 Limite et continuité des fonctions complexes

Définition 1.7 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, telle que f est définie au voisinage de z_0 sauf, peut être en z_0. On définit la* ***limite*** *de f quand z tend vers z_0, et on écrit : $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, si et seulement si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall z \in \Omega : [0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon]$$

Exemple 1.3 *Montrer que : $\lim_{z\to 1}\left(\frac{iz}{2}\right) = \frac{i}{2}$.*
On a $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z) - w_0| = \left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{i}{2}(z-1)\right| = \frac{1}{2}|z-1| < \varepsilon \Rightarrow |z-1| < 2\varepsilon$.
Donc, il suffit prendre $\delta = 2\varepsilon$.

Définition 1.8 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ensemble, $z_0 \in \Omega$ un de ses points et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. Les énonces suivants sont alors équivalents :*
1)- Pour toute suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Ω,

$$\left[\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0\right] \Rightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = f(z_0)\right]$$

2)- A chaque $\varepsilon > 0$ correspond $\delta > 0$, tels que

$$[z \in \Omega \text{ et } |z - z_0| < \delta] \Rightarrow [|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon]$$

Lorsqu'ils sont satisfaits, la fonctions f est dite ***continue en*** *z_0. Si elle est continue en chaque points $z_0 \in \Omega$, on dit que f est* ***continue sur*** *Ω.*

- Une fonction complexe est continue si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.
- Ainsi s sommes, différences, produits, quotients et compositions de fonctions continues (lorsqu'elles sont définies) sont des fonctions continues.
- Toute limite **uniforme** de fonctions continues est une fonction continue.

Remarque 1.2 *Le nombre δ dans la définition précédente dépend à la fois de z_0 et de ε. S'il peut être choisi indépendamment de $z_0 \in \Omega$, on dit que f est* ***uniformément continue*** *sur Ω.*

1.4 Rappels sur les suites et séries de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.9 *. La suite de fonctions* (f_n) ***converge simplement*** *si pour tout* $z \in \Omega$*, la suite* $(f_n(z))$ *converge dans* $\mathbb{C}$*.*

. la suite de fonctions (f_n) ***converge uniformément (CV.U)*** *sur* Ω *vers une fonction* f *si*

$$\lim_{n \to +\infty} \left[Sup_{z \in \Omega} \left| f_n(z) - f(z) \right| \right] = 0$$

Proposition 1.3 *La suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément si et seulement*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N > 0 : \ \left[\forall (m,n) \in \mathbb{N}_*^2 : m \geq N, n \geq N, z \in \Omega \right] \Rightarrow \left[\left| f_m(z) - f_n(z) \right| \leq \varepsilon \right]$$

Passant, maitenat, au cas des séries de fonctions à valeurs complexes. Etant donnée une suite de fonction (f_n) définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, **la série de terme général** f_n notée $\sum f_n$ est la suite de fonctions formée par les sommes partielles : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (f_k)$.

Définition 1.10 *La série de fonctions* $\sum f_n$ ***converge simplement (resp. uniformément)*** *si la suite de fonction formée par les sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} (f_k)$ *converge simplement (resp. uniformément).*

. Si $(S_n(z))$ *converge on appelle* ***somme de la série*** $\sum f_n$ *et l'on note* $\sum_{n=0}^{+\infty} (f_n)$ *(ou simplement* $\sum (f_n)$ *)* ***la limite*** *de* $(S_n(z))$ *.*

. La série $\sum f_n$ *est dite* ***normalement convergente*** *sur* Ω*, si* $\sum_n \|f_n(z)\| < +\infty$*, et on a alors*

Proposition 1.4 *Si la série* $\sum f_n$ *est normalement convergente, alors elle est uniformément convergente.*

1.5 Exercices

1. Calculer les deux racines du polynôme

$$z^2 + (1+i)\,z - (2+3i) = 0$$

2. Ecrire le nombre complexe $z = -1 + 2i$ en coordonnées polaires, puis calculer $\sqrt[3]{z}$.
3. Décrire géométriquement les parties du plan complexe définies par
   a- $|z| < 1$, $|z+3| \leq 2$, $|z+i| \geq 1$,
   b- $\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} z + 2 \operatorname{Im} z < 5$,
   c- $3\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq 5\frac{\pi}{6}$,

Les quelles de ces ensembles sont ouverts, fermé, borné et compacts ?

4. Expliquer pour quoi il est impossible de définir sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre compatible avec les opérations algébriques.

5. Déterminer $\operatorname{Re}(1+i)^{2k+1}$ et $\operatorname{Im}(1+i)^{2k+1}$.
6. Calculer les limites
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\, i^n}{n+1},\quad \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
7. Soit la série
$$S(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^z},\quad \operatorname{Re}(z)>1$$

Vérifier que cette série converge uniformément dans tout demi-plan $\operatorname{Re} z \geq a > 1$.

Chapitre 2

Séries entières, fonctions analytiques et fonctions élémentaires

2.1 Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où les coefficients a_n sont des nombres complexes, ainsi que $z = x + iy\,;\ \ x, y \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Définitions et propriétés

Dans tout ce qui suit $\sum a_n z^n$ désigne une série entière.

Définition 2.1 *(Rayon de convergence)*
On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

$$R = \sup\left\{r \geq 0 : \sum |a_n|\ \ r^n < +\infty\right\}$$

Le rayon de convergence existe toujours, il peut valoir 0, $+\infty$ *ou un nombre fini.*
Le rayon de convergence peut être obtenu comme suit :

Lemme 2.1 *(D'abel) - Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est*

$$R = \sup\left\{r \geq 0 : \sup_n |a_n|\ \ r^n < +\infty\right\}$$

Preuve. *soit* R *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *et soit* $R_0 = \sup\{r \geq 0 : \sup_n |a_n|\ \ r^n < +\infty$
.

. Soit $r_0 < R_0$, alors il existe M tel que $|a_n|\ r_0^n \leq M$ et donc si $r < r_0$, on a $|a_n|\ r^n = |a_n|\ r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$, et donc $\sum |a_n|\ r^n < +\infty$, puisque son terme général est majoré par celui d'une série géométrique convergente, on a donc $R \geq r_0$ et donc, en passant à la limite quand r_0 tend vers R_0^-, on obtient $R \geq R_0$.

. Si $r < R$, par définition $\sum |a_n|\ r^n < +\infty$, et donc en particulier la suite $(|a_n|\ r^n)_n$ est bornée, si bien que $R \leq R_0$. ■

Exemple 2.1 *- La série $\sum z^n$ est une série entière dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

- $\sum z^n$ est une série entière dont les coefficients d'ordres paires valent 1,les coefficients d'ordres impaires sont nuls.

Théorème 2.1 *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors*

1)- Si $R = 0$, la série n'est convergente que pour $z = 0$.

2)- Si $0 < R < +\infty$, pour tout $r < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$, et est divergente en tout point z, $|z| > R$.

3)- Si $R = +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé (ou sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$).

Remarque 2.1 *. Ce théorème signifie que le domaine de convergenge d'une série entière est forcèment un disque avec des lacunes sur les frontières. Cela implique que si une série converge, par exemple, sur un triangle, elle convergera forcèment sur un domaine plus gros (au moins le disque circonscrit).*

. Le théorème de dite rien sur ce qui se passe sur cercle $C(0,R)$.

Somme et produit des séries entières convergentes

Proposition 2.1 *Soient $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières dont les rayons de convergence R_1 et R_2 sont non nuls.*

Alors chacune des séries entières $A + B$ et $A.B$ a un rayon de convergence au moins égale à $R_0 = \inf(R_1, R_2)$ et pour $|z| < R_0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n &= \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right]\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n\right]\end{aligned}$$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k)$.

Preuve. On pose $\gamma_n = |a_n| + |b_n|$, $\delta_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k| |b_{n-k}|$. soit z, $|z| < R_0 = \inf(R_1, R_2)$. Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ sont absolument convergentes. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n + b_n| z^n &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n |z|^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| |z|^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| |z|^n < +\infty \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| |z^n| &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n |z^n| = \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| |z|^n\right] \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| |z|^n\right]\end{aligned}$$

Les séries entièrs $A+B$ et $A.B$ sont donc convergentes pour $|z| < R_0$. Ce qui achève la preuve. ■

Définition 2.2 ***(Disque de convergence)***

*Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. Si $0 < R < +\infty$, le disque $D(0, R)$ est appelé le **disque de convergence** de cette série.*

Détermination du rayon de convergence

Proposition 2.2 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors on a*

$$R = \frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$$

Preuve. *(Exercice)* ■

Remarque 2.2 *- Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ tends vers l ($0 \leq l \leq +\infty$) lorsque n tend vers $+\infty$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l}$.*

Exemple 2.2 *- Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :$\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+i)^n z^n$. On a $a_n = (1+i)^n$, donc $|a_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}$, donc $R = \frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{\limsup 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Proposition 2.3 *- Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.*

Preuve. *- On note $\grave{R}$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$. On pose $\alpha_n = |a_n|$, on sait que pour $r < \grave{R}$ on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$$

Donc, pour $r < \grave{R}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n r^n \leq r \sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$, donc $r < R$ et par suite $\grave{R} \leq R$. Inversement, soit $r < R$ et soit $\grave{r}$ tel que $r < \grave{r} < R$, alors

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{n\alpha_n}{\grave{r}} (\grave{r})^n \left(\frac{r}{\grave{r}}\right)^{n-1}$$

Comme $\grave{r} < R$, la suite $(\alpha_n (\grave{r})^n)$ est majorée par une constante M. Donc

$$n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{M.n}{\grave{r}} \left(\frac{r}{\grave{r}}\right)^{n-1}$$

La série de terme général $n\left(\frac{r}{\grave{r}}\right)^{n-1}$ *est convergente , donc* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n r^{n-1}$ *est convergente, et aussi* $r<\grave{R}$ *, et par suite* $R\leq\grave{R}$ *, d'où* $R=\grave{R}$*.* ■

2.2 Fonctions analytiques

Définition 2.3 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*, et soit* f *une fonction de* Ω *dans* $\mathbb{C}$*.*
On dit que f *est* ***analytique en un point*** $z_0\in\Omega$*, si elle est* ***développable en série entière*** *au voisinage de* z_0*, c-à-d il existe* $r>o$ *et une suite* $(a_n)_n\in\mathbb{C}$ *tels que* $D(z_0,r)$ *et*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ,\forall z\in D(z_0,r)$$

- Et on dit que f *est analytique sur* Ω *si elle est analytique en tout poit de* Ω*.*

Exemple 2.3 *. Le polynôme de degré* n *est une fonction analytique en tout pont de* $\mathbb{C}$*; en effet , on a d'aprés la formule de Taylor*

$$P(z)=P(z_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k$$

Principe des zéros isolés pour les séries entiéres

Proposition 2.4 *Soit* $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ *la* ***somme*** *d'une série entière de rayon de convergence* $R>0$*. Supposons qu'il existe au moins un des coefficents* a_n *non nul, alors il existe* $r>0$ *tel que* $f(z)\neq 0$ *pour* $0<|z|<r$*.*
Preuve. *Soit* $n_0=\inf\{n\geq 0, a_n\neq 0\}$*, alors on a*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=z^{n_0}g(z),$$

où

$$g(z)=\sum_{n\geq n_0}^{+\infty}a_{n_0+k}z^k,\text{ avec } g(0)=a_{n_0}\neq 0.$$

Comme g *est la somme d'une série entière, elle est continue à l'interieur de son disque de convergence. Donc il existe un voisinage de* 0 *sur le quel* $g(z)\neq 0$*.*
En particulier, $\exists r>0: g(z)\neq 0,\forall z\in D(0,r)$ *. Et comme* $f(z)=z^{n_0}g(z)$*, alors* $f(z)\neq 0$ *pour tout* $z\in D(0,r)$ *.* ■

Proposition 2.5 *Soit* $f:\Omega\to\mathbb{C}$ *une fonction analytique. Alors* f *admet un* ***unique developpement*** *en série entière au voisinage de chaque point de* Ω*.*

Preuve. Soit $z_0 \in \Omega$, supposons que pour tout z dans un voisinage de z_0 : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n, \forall z \in D(z_0, r)$, Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n = 0, \forall z \in D(z_0, r)$,Donc $a_n - b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (D'après le pricipe des zéros isolés pour les séries entières). d'où $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Notion de dérivée

On va donner la notion de **la dérivée d'une fonction complexe**, qui nous reviendrons en détail au chapitre suivant.

Définition 2.4 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie sur un voisinage de z_0 et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que f est* ***dérivable*** *en z_0 si la limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, et dans ce cas on l'appelle dérivée de f en z_0 et l'on note $f'(z_0)$ où $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Théorème 2.2 *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence R est non nul. Alors la somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction dérivable, sur le disque de convergence, et dans ce disque on a*

$$\acute{f}(z_0) = \sum_{n \geq 1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Proposition 2.6 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique en un point $z_0 \in \Omega$, alors les* ***coefficients*** *a_n du developpement en série entière de f au voisinage de z_0 sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. *On a d'abord que la somme d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable sur son disque de convergence d'après le théorème précédent.*
On pose, maintenant, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, on a pour toit $k \in \mathbb{N}$ et tout z du disque de convergence

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)....(n-k+1)(z - z_0)^{n-k}$$

En particulier, pour $z = z_0$ on a $f^{(k)}(z_0) = k.a_k, \forall k \in \mathbb{N}$.
Et d'après l'unicitè du developpement en série entière, on obtient

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

ce qui prouve la proposition. ■

Remarque 2.3 *Il découle de ce nous avons vu précédement que :*

*- Une fonction **analytique** est **indéfiniment dérivable**.*

*- Le developpement en série entière de f en z_0 coincide avec son **développement de Taylor.***

*- Les **dérivées successives** d'une fonction analytique sont aussi analytiques.*

Définition 2.5 ***(Fonction entière)***

Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$, s'appelle une fonction entière.

2.3 Fonctions élémentaires de $\mathbb{C}$

2.3.1 Fonction exponentielle

On appelle fonction **exponentielle** complexe, la fonction définie par la série entière suivante :

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

. Il est claire, de la définition d'exponentielle complexe, qu'elle est une fonction **entière** (C-à-d : $R = +\infty$).

. On remarque que

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \quad \in \quad \mathbb{C} : \; e^{z_1}.e^{z_2} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_2^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k!\,(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

. La fonction exponentielle est **indéfiniment dérivable**, et sa dérivée vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n.z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Et donc $\frac{d(e^z)}{dz} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.4 $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, *et si* $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, *on a* $|e^{iy}| = e^0 = 1$.

2.3.2 Logarithme complexe

Il s'ager d'inverser la fonction exponentielle (complexe). Comme la fonction exponentielle n'est pas injective (puisqu'elle est $2\pi-$ périodique), on peut alors s'attendre à des problèmes.

En effet, l'équation $e^z = \rho.e^{i\theta}$ admet une infinité de solutions, si on pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donc

$$\left(e^z = \rho.e^{i\theta}\right) \Leftrightarrow \left(e^{x+iy} = \rho.e^{i\theta}\right) \Rightarrow \left(e^x.e^{iy} = \rho.e^{i\theta}\right) \Rightarrow \begin{cases} e^x = \rho \\ y = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \ln(\rho) \\ y = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où $z = x + iy = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ces solutions sont les logarithmes de $\rho.e^{i\theta}$, ainsi chaque élément de $\mathbb{C}^*$ possède une infinité de logarithmes complexes.
Si on veut parler d'une **fonction logarithme complexe**, il faut restreindre l'ensemble des valeurs de la variable et préciser quelle est la détermination choisie.

Définition 2.6 ***(Détermination du logarithme)***
*Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle **détermination du logarithme** de z, et on note $\log(z)$ tout nombre complexe w vérifiant $e^z = w$.*
Et on a

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) \qquad \textit{(Modulo } 2\pi i \textit{)}$$

Définition 2.7 *On dit qu'une fonction continue g d'une variable complexe z, définie sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ ne contenant pas 0, est une **détermination du logarithme** sur Ω si*

$$\exp(g(z)) = z, \forall z \in \Omega.$$

Proposition 2.7 *Soit Ω un **domaine** (ouvert et connexe) de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0,toute autre détermination du logarithme sur Ω est de la forme $\phi + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.*
Preuve. *Soient g et ϕ deux déterminations du logarithme sur Ω, alors elles sont , par définitions, continues sur Ω, et donc la fonction $h(z) = \frac{1}{2\pi i}(g(z) - \phi(z))$ est continue sur l'ouvert connexe Ω.*
De plus, on a

$$\exp(2\pi i h(z)) = 1, \forall z \in \Omega.$$

alors $2\pi i h(z) = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, donc $h(z) = k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \Omega$ (donc h est constante)
on obtient

$$(g(z) - \phi(z)) = 2\pi i h(z) = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

Il résulte finalement

$$g(z) = \phi(z) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

■

2.3.3 Fonctions z^{α} et $(f(z))^{\alpha}$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, à chaque détermination du logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$, notée $\log(z)$, nous considérons le nombre z^{α} , tel que

$$z^{\alpha} = \exp(\alpha \log(z)).$$

Plus généralement, si $z \to f(z)$ est une fonction continue ne s'annule pas sur un ouvert Ω, et si $z \to \log(z)$ est une détermination du logarithme sur $f(\Omega)$, on définit une fonction complexe continue, notée par

$$(f(z))^{\alpha} = \exp(\alpha \log(f(z)))$$

2.3.4 Fonctions trigonométriques et hyperbolyques

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous donnons :

1)-

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

2)-

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3)-

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = ch(z)$$

4)-

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = sh(z)$$

Et on a les relations :

$$\sin(z) = \frac{1}{i}(\sinh(iz)), \quad \cos(z) = \cosh(iz)$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad \cos z - i\sin z = e^{-iz}.$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

- Les seules zéros de $\cos(z)$ sont les nombres réels : $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Les seules zéros de $\sin(z)$ sont les nombres réels :$k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- La fonction tangente, notée $\tan(z)$, est définie par $z \to \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$, est définie et continue dans $\mathbb{C} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- La fonction cotangente, notée $\coth(z)$, est définie par $z \to \coth(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$, est définie et continue dans $\mathbb{C} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- La fonction tangante hyperbolique est définie par

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

2.3.5 Fonctions trigonimétriques réciproques

On définit les fonctions $\arcsin, \arccos, \arctan$ et arccot, respectivement, comme fonctions réciproques des fonctions trigonométriques suivantes : $\sin, \cos, \tan$ et $\cot$.
Toutes ces fonctions sont multiformes et exprimées par l'intermidiaire des fonctions logarithmes comme suit :

$$\arcsin(z) = -i\log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\arccos(z) = -i\log\left(z + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\arctan(z) = \frac{-i}{2}\log\frac{z+i}{z-i}.$$

Et les déterminations principales ($k = 0$) des **fonctions trigonométriques réciproques** : $\arcsin, \arccos, \arctan$ et arccot s'obtiennent si l'on prend les déterminations principales des fonctions logorithmiques correspondantes.

Chapitre 3

Fonction holomorphes

3.1 Dérivabilité au sens complexe

3.1.1 Fonctions $\mathbb{C}-$dérivables

Définition 3.1 *Soit Ω un **ouvert** de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite **dérivable au sens complexe** au point $z_0 \in \mathbb{C}$, ou $\mathbb{C}-$**dérivable**, si la limite suivante*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe dans $\mathbb{C}$ et elle est unique.
De même

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$ et est unique.
Si cette limite existe, on note

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

1)- Si f est $\mathbb{C}-$**dérivable** en un point $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \Omega$, alors f considérée comme fonction de deux variables est **différentiable** en (x_0, y_0).
2)- Si f est $\mathbb{C}-$**dérivable** en un point $z_0 \in \Omega$, alors pour h assez petit tel que $z_0 + h \in \Omega$, on a $f(z_0 + h) - f(z) = f'(z_0).h + |h| \varepsilon(h)$
où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, et on note que c'est la définition d'une fonction **différentiable**.

Exemple 3.1 *1)- Soit la fonction $f(z) = z^2$, on a :*

$$\forall z \in \mathbb{C} : \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2-(z)^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2z+h) = 2z$$

Donc $\frac{d(z^2)}{dz} = 2z, \forall z \in \mathbb{C}$.
2)- Soit la fonction : $f(z) = |z|^2$ *, on a*

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = \frac{(z+h)\left(\overline{z}+\overline{h}\right)-z\overline{z}}{h} \\ &= \overline{z}+\overline{h}+z\frac{\overline{h}}{h} \end{aligned}$$

Pour $z=0$, *on a* $\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = \overline{h}$, *et donc*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = 0 \quad (\text{pour } z=0\,)$$

Si la quantité $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *a une limite pour* $z \neq 0$, *alors cette limite ne dépend pas de la manière de la tendence de* h *vers zéro.*
Par exemple, si h *tend vers zéro sur l'axe réel, on obtient* $\overline{h} = h$, *et donc* $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \overline{z}+z$.
Et si h *tend vers zéro sur l'axe des imaginaires, on obtient* $\overline{h} = -h$, *et donc* $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \overline{z}-z$.
Et comme la limite doit être unique, alors $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *n'a pas de limite quand* $z \neq 0$.

3.1.2 Continuité des fonctions $\mathbb{C}-$dérivable

Si f est une fonction $\mathbb{C}-$**dérivable** au point $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$, alors f est **continue** en z_0.
En effet, f est holomorphe en z_0 implique que

$$\lim_{h\to 0}\left(f(z_0+h)-f(z_0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.h = 0$$

(Puisque $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe).

3.1.3 Opérations algèbriques sur les fonctions $\mathbb{C}-$dérivables

Les mêmes propriétés algébriques avec les fonctions $\mathbb{C}-$**dérivables** sont obtenues comme celles des dérivées réelles.

Proposition 3.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions $\mathbb{C}-$**dérivables** en un point z_0 de Ω, telles que $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$.*
On a les propriétés suivantes

*1)- **La somme** $f+g$ est $\mathbb{C}-$dérivable en point z_0 et on a*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

Et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, λf est $\mathbb{C}-$dérivable en point z_0 et on a

$$(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$$

*2)- **Le produit** $f.g$ est $\mathbb{C}-$dérivable en point z_0 et on a*

$$(f.g)'(z_0) = f'(z_0).g(z_0) + g'(z_0).f(z_0)$$

3)- Si $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est $\mathbb{C}-$dérivable en point z_0 et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0).g(z_0) - g'(z_0).f(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Preuve. *(Exercice)* ■

Proposition 3.2 *Soient Ω et Ω' deux **ouverts** de $\mathbb{C}$, $f:\Omega \to \mathbb{C}$, $g:\Omega\prime \to \mathbb{C}$. On suppose que f est $\mathbb{C}-$**dérivable** en point z_0, et que g est $\mathbb{C}-$**dérivable** en $f(z_0)$. Alors gof est $\mathbb{C}-$**dérivable** en point z_0, et on a*

$$(gof)'(z_0) = g'(f(z_0)).f'(z_0)$$

Preuve. (Exercice) ■

3.1.4 Fonctions holomorphes

Définition 3.2 *Soit Ω **un ouvert** de $\mathbb{C}$. Une fonction $f:\Omega \to \mathbb{C}$ est dite **holomorphe** sur Ω, si elle est $\mathbb{C}-$**dérivable** sur Ω en tout point de Ω. On note par $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.*

Définition 3.3 *Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Une fonction $f:A \to \mathbb{C}$ est dite **holomorphe sur** A s'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant A, sur le quel la fonction f est définie et elle est holomorphe.*

Définition 3.4 ***(Fonction entière)***
*Une fonction f est dite **entière,** si elle est **holomorphe sur le plan complexe** tout entier.*

3.2 Equations de Cauchy-Riemann

Une fonction complexe, peut être vue comme une fonction de deux variables réelles.
Le problème de la dérivation peut être abordé de différentes manières : via la fonction d'accroissement, la différentielle et les dérivées partielles.
La question qui se pose est la suivante :
Quels sont les liens entre ces différents éléments ?, peut-on exprimer des conditions simples permettant d'assurer la $\mathbb{C}-$dérivabilité en un point z_0?

Définition 3.5 *1)- Soient Ω un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$.
Si $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(h,k)\| = (h^2, k^2)^{\frac{1}{2}}$.
On dit que f admet en (x_0, y_0) une **dérivée partielle** suivant la variable x (resp. suivant la variable y), si l'application : $x \mapsto f(x, y_0)$ (resp. $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable au point x_0 (resp. au point y_0).
Et on écrit*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}\end{aligned}$$

*2)- La fonction f est dite de **classe** C^1 sur Ω, si elle admet en tout point de Ω des dérivées partielles suivant x et y, et si ces **dérivées partielles** sont **continues** sur Ω.
3)- On dit que f est **différentiable** en (x_0, y_0), s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + a.h + b.k + \|(h,k)\| \varepsilon(h,k)$$

*où $\varepsilon(h,k)$ tend vers 0 si $\|(h,k)\|$ tend vers 0.
S'il en ainsi, l'application : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(h,k) \to a.h + b.k$ est une application linéaire qui s'appelée **la différentielle** de f en (x_0, y_0) ; on la note $df(x_0, y_0)$.
Supposons que f soit **différentiable** en (x_0, y_0), conservant les notations précédentes. Alors f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0), et on a*

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Par suite

$$df(x_0, y_0) = h.\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

*Supposons que f soit **différentiable** en tout poit de Ω, on définit **l'application différentielle** de f, notée df qui à chaque $(x,y) \in \Omega$ associe l'application linéaire $df(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 3.1 ***1)****- On rappelle que les conditions suivantes sont* ***équivalentes*** *:*

i)- f est de ***classe*** *C^1 sur Ω.*

ii)-f est ***différentiable*** *en tout point de Ω, et l'application : $(x, y) \to df\ (x, y)$ est* ***continue*** *sur Ω.*

2)*- Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une* ***application linéaire****, il est immédiat que u est* ***différentiable*** *en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que $du\,(x_0, y_0) = u\,(x_0, y_0)$, pour tout (x_0, y_0).*

En particulier, les applications : $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$ sont différentiables en tout point de $\mathbb{R}^2$, de même l'application $(x, y) \to z = x + iy$.

On notera donc dx, dy et dz leurs différentielles, et on a $dz = dx + idy$.

Proposition 3.3 ***(Conditions de Cauchy-Riemann)***

Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les conditions suivantes sont ***équivalentes***

i)- f est ***dérivable*** *en z_0.*

ii)- f est ***différentiable*** *en (x_0, y_0), et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

iii)- f est ***différentiable*** *en (x_0, y_0) telle que $df\,(x_0, y_0) \in \mathbb{C}.d\mathbb{Z}$, et on a*

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Preuve. *f est* ***dérivable*** *en z_0, donc il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, et une fonction ε_1 définie au voisinage de 0 telles que*

$$f(z_0 + \xi) = f(z_0) + f'(z_0).\xi + \xi.\varepsilon_1(\xi) \tag{1}$$

où $\varepsilon_1(\xi)$ tend vers 0 si ξ tend vers 0.

Dire que f est ***différentiable*** *en (x_0, y_0) signifie qu'il existe des nombres complexes $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et une fonction ε_2 définie au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + a.h + b.k + \|(h, k)\|\,\varepsilon_2(h, k) \tag{2}$$

où $\varepsilon_2(h, k)$ tend vers 0 quand $\|(h, k)\|$ tend vers 0.

$\mathbf{i)} \Rightarrow \mathbf{ii)}$

Supposons que $\mathbf{i)}$ soit vérifié, on pose $\xi = h + ik$ dans (1), avec $h, k \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + f'(z_0)(h + ik) + (h + ik).\varepsilon_1(h + ik) \\ &= f(x_0, y_0) + f'(z_0).h + ik.f'(z_0) + (h + ik).\varepsilon_1(h + ik) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(h, k)$ tend vers 0 quand $\|(h, k)\|$ tend vers 0.

Il est claire qu'obtient (2) *avec* $a = f'(z_0)$ *et* $b = if'(z_0)$, *donc* $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + a.h + b.k + \|(h,k)\| \varepsilon_2(h,k)$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = a + ib = f'(z_0) + i(if'(z_0)) = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$$

ii) $\Rightarrow$ **iii)**

Supposons que **ii)** *soit vrai, pour* $h, k \in \mathbb{R}$, *on a*

$$df(x_0, y_0)(h,k) = a.h + b.k = ah + (ia).k = a.(h + ik)$$

Ainsi,

$$df(x_0, y_0) = a.dz.$$

iii) $\Rightarrow$ **i)**

Soit $a \in \mathbb{C}$ *tel que* $df(x_0, y_0) = a.dz$. *Pour* $h, k \in \mathbb{R}$, *on a donc, en posant* $\xi = h + ik$,

$$f(z_0 + \xi) = f(z_0) + a\xi + \|(h,k)\| \varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(h,k)$ *tend vers* 0 *quand* $\|(h,k)\|$ *tend vers* 0.

On en déduit immédiatement que f *est dérivable en* z_0, *et que* $f'(z_0) = a$. ■

Remarque 3.2 *Dans ce qui précéde,* $f \in H(\Omega)$ *équivalent à*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On note P *et* Q *les parties réelle et imaginaire de* f, *c-à-d :*

$$f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y), \forall (x,y) \in \Omega^2.$$

où $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *donc*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0\right] \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \tag{3}$$

Les conditions (3) *sont appelées* ***les conditions de Cauchy-Riemann.***

Proposition 3.4 *Soient* Ω *un* ***ouvert connexe*** *de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in H(\Omega)$. *Si* f' *est* ***identiquement nulle*** *sur* Ω, *alors* f *est* ***constante.***

Preuve. Soient $z_0 \in \Omega$ et D un disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω.

Si $z_1 \in D$, le point $z_2 = \operatorname{Re}(z_1) + i\operatorname{Im}(z_2)$ appartient à D.

Les segments de droites compacts d'extrémités z_0, z_2 et z_1, z_2 étant connexes et contenus dans D, on a

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 0\right] \Rightarrow f(z_0) = f(z_2)$$
$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} = 0\right] \Rightarrow f(z_2) = f(z_1)$$

Ainsi, $f(z_0) = f(z_1)$. On en déduit que f est localement constante, et comme Ω est connexe, f est constante. ■

Proposition 3.5 *Soient Ω un **ouvert connexe** de $\mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega)$. Les conditions suivantes sont **équivalentes***

1)- f est constante sur Ω.

2)- $\operatorname{Re}(f)$ est constante sur Ω.

3)- $\operatorname{Im}(f)$ est constante sur Ω.

4)- $|f|$ est constante sur Ω.

5)- $\overline{f}$ est constante sur Ω.

Preuve. (Exercice) ■

Remarque 3.3 *Les conditions de **Cauchy-Riemann** ne sont que **des conditions nécessaires** pour **la dérivabilité** des fonctions, c-à-d : il existe des fonctions qui admettent des dérivées partielles vérifiant les équations de Cauchy-Riemann sans être $\mathbb{C}-$**dérivables.***

Par exemple

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x.y)(x+iy)}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) = 0$$

Mais la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ *n'existe pas.*

On introduit les **opérateurs aux dérivées partielles** suivants

$$\frac{\partial .}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial .}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial .}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial .}{\partial x} - i.\frac{\partial .}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial .}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial .}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial .}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial .}{\partial x} + i.\frac{\partial .}{\partial y}\right)$$

On a la proposition suivante

Proposition 3.6 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}-$**dérivable** en un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors on a*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= f'(z_0) = 2\frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Preuve. (Exercice) ■

Remarque 3.4 *Les équations de **Cauchy-Riemann** traduisent le fait qu'une fonction holomorphe ne dépend pas de la variable $\overline{z}$.*

Condition suffisante pour l'holomorphie

Théorème 3.1 *Soit la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ définie sur un voisinage d'un point $z_0 = x_0 + iy_0$.*
*Supposons que **les dérivées partielles premières** des fonctions P et Q par rapport aux variables x, y **existent** dans ce voisinage et elles sont **continues** au point (x_0, y_0), alors **la dérivée** de f au point z_0 **existe**.*

Preuve. On pose $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, telle que $0 < |\Delta z| < \varepsilon$, et on écrit $\Delta w = \Delta P + i\Delta Q$, tel que

$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) \\
\Delta Q &= Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - Q(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Et comme P et Q sont continues au point (x_0, y_0), on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta P &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0).\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).\Delta y + \varepsilon_1\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \\
\Delta Q &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).\Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).\Delta y + \varepsilon_2\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)
\end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 tendent vers zéro, quand $(\Delta x, \Delta y)$ tend vers zéro.
Et donc

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0).\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).\Delta y + \varepsilon_1\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \\
&\quad + i.\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).\Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).\Delta y + \varepsilon_2\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann dans (4), on obtient

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i.\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z}$$

Mais

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

donc

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i.\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = f\prime(z_0)$$

■

Exemple 3.2 *Soit* $f(z) = e^z = e^x.e^{iy} = e^x.\cos y + i.e^x.\sin y$.
On a

$$[P(x,y) = e^x.\cos y] \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = e^x.\cos y \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -e^x.\sin y \end{cases}$$

et

$$[Q](x,y) = e^x.\sin y \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x.\sin y \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = e^x.\cos y \end{cases}$$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= e^x.\cos y = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -e^x.\sin y = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

*Les conditions de **Cauchy-Riemann** sont satisfaites, et comme* $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *sont **continues**, alors* f *est* $\mathbb{C}-$***dérivable*** *sur* $\mathbb{C}$.

3.3 Fonctions harmoniques

Définition 3.6 *Une fonction* $f(x,y)$ *est appelée **harmonique** dans un domaine* Ω*, si elle possède, dans ce domaine, des **dérivées partielles** continues **d'ordre deux** et s'elle satisfait à **l'équation de Laplace***

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Proposition 3.7 *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction **holomorphe** sur un ouvert* Ω*, telle que* $f = P + i.Q$*. Si* P *et* Q *sont de **classe*** C^2*, alors pour tout* $(x,y) \in \Omega$*, on a*

$$\begin{aligned} \Delta P(x,y) &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta Q(x,y) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

Preuve. *On a f holomorphe sur Ω, donc*

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}\end{aligned}$$

Et comme P et Q sont de classe C^2, alors $\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$, ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.5 *Si une fonction $f = P + i.Q$ est **holomorphe** dans certain domaine, ces **parties réelle** et **imaginair** sont **harmoniques** dans ce domaine.*
Toute fois, si l'on a deux fonctions harmoniques quelconques $P(x,y)$, $Q(x,y)$, cela ne veut pas dire que la fonction $f = P + i.Q$ doit obligatoirement être une fonction holomorphe.
Pour qu'il en soit ainsi, les fonctions P et Q doivent en outre vérifier les conditions de Cauchy-Riemann.

Exemple 3.3 *Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions harmoniques*
a)- $P(x,y) = x^2 + 2x - y^2$, ***b)-*** $P(x,y) = 2e^x \cos(y)$
- On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left(P(x,y) = x^2 + 2x - y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -2 \end{cases}$$

on obtient

$$\Delta P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

donc P est harmonique.
- On a

$$\left(P(x,y) = 2e^x \cos(y)\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2e^x \cos(y) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -2e^x \cos(y) \end{cases}$$

on obtient

$$\Delta P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Donc, P est harmonique.

Chapitre 4

Intégration des fonctions complexes

4.1 Arcs et chemins

Définition 4.1 *- On appelle **arc** toute **application continue** γ d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. S'il en est ainsi, on le notera souvent $([a,b], \gamma)$.*
*- On dit que $\gamma(a)$ est l'**origine** et que $\gamma(b)$ est l'**extrémité**.*
*- On dit que γ est **fermé** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.*
*- L'arc est dit **simple** si γ est une application **injective**.*
*- Il est dit **réduit à un point** si l'application γ est **constante.***
*- Si $([a,b], \gamma)$ est un **arc**, on note $im(\gamma)$ pour $\gamma([a,b])$.*
*- Si Ω est un **ouvert** de $\mathbb{C}$, on dit que γ est un arc dans Ω, si $im(\gamma) \subset \Omega$.*
*- L'**arc opposé** à $([a,b], \gamma)$ est l'arc $([a,b], \delta)$ défini, pour tout $t \in [a,b]$, par $\delta(t) = \gamma(a+b-t)$, c'est l'arc parcouru dans l'autre sens.*
*- Soient $([a,b], \gamma)$ et $([a,b], \delta)$ deux arcs tels que $\gamma(b) = \delta(c)$, on appelle **arc composé** de γ et δ l'arc noté $([a, b+d-c], \gamma \cup \delta)$ tel que, si $t \in [a, b+d-c]$*

$$(\gamma \cup \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(t), \text{ si } t \in [a,b] \\ \delta(t), \text{ si } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Intuitivement, c'est l'arc obtenu en parcourant γ puis δ.
*- Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et γ une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.On dit que γ est de **classe** C^1 **par morceaux,** si elle est **continue**, et s'il existe une **subdivision***

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots.. < a_{n-1} < a_n = b$$

*de $[a,b]$, telle que $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ soit **contiûment dérivable** pour $0 \leq i \leq n-1$.*

*- On appelle **chemin** dans un ouvert Ω tout arc $([a,b],\gamma)$ dans Ω, tel que soit de **classe** C^1 **par morceaux.***

*- Deux chemins $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ sont dits **équivalents,** s'il existe une application $\phi:[a,b]\to[c,d]$, vérifiant les conditions suivantes*

i)-** ϕ est **bijective, croissante** et de **classe** C^1 **par morceaux.

ii)-** La **bijection réciproque** de ϕ est de **classe** C^1 **par morceaux.

***iii)-** On a $\gamma=\delta o\phi$.*

*- Si γ et δ sont **équivalents,** on a $im(\gamma)=im(\delta)$.*

Exemple 4.1 *Soit $a,b\in\mathbb{R}$, tels que $a<b$, les chemins : $[a,b]\to\mathbb{C}$, $x\mapsto x$ et $[0,1]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto(1-t)a+tb$ sont équivalents.*

Quelques exemples importants des chemins

1) **Le cercle** : Soient $z_0\in\mathbb{C}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$,le cercle de centre z_0 et de rayon r, qui est un **chemin fermé**, est défini par

$$\begin{array}{rcl}[0,2\pi] & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & z_0+re^{it}\end{array}$$

2) **Le segment** : Soient $u,v\in\mathbb{C}$, le segment orienté d'origine u et d'extrémité v, qui le note $[u,v]$, est défini par

$$\begin{array}{rcl}[0,1] & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & (1-t)u+tv\end{array}$$

tandis que, le chemin opposé à ce chemin est le chemin $[v,u]$.

3)- **Le triangle :** Soient $(u,v,w)\in\mathbb{C}^3$, avec u,v,w deux à deux distincts, notons $\Delta=\Delta(u,v,w)$, le triangle de sommets u,v,w , c'est à dire

$$\Delta=\left\{t_1u+t_2v+t_3w;\ \ (t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}_+^3, t_1+t_2+t_3=1\right\}$$

Le bord $\partial\Delta$ de Δ est, par définition, le **chemin fermé** obtenu en composant les segments orientés $[u,v],[v,w],[w,u]$, c'est le chemin $([0,3],\gamma)$ défini par

$$\gamma(t)=\begin{cases}(1-t)u+tv, & \text{si } t\in[0,1]\\ (2-t)v+(1-t)w, & \text{si } t\in\ [1,2]\\ (3-t)w+(t-2)u, & \text{si } t\in\ [2,3]\end{cases}$$

Partie connexe par arc

$A\subset\mathbb{C}$ est dite **connexe par arc** si, pour tous points u,v de A,il existe un arc γ d'origine u, et d'extrémité v, et vérifiant $im(\gamma)\subset A$.

Remarque 4.1 *On rappelle qu'il existe une* ***équivalence*** *entre les conditions suivantes*

1)- u *est* ***connexe.***

2)- u *est* ***connexe par arcs.***

où u *est un ouvert de* $\mathbb{C}$.

4.2 Intégration complexe

Soient $([a,b],\gamma)$ un **chemin** et f une fonction **continue** sur $im(\gamma)$, l'intégrale de f sur γ, notée $\int_\gamma f(z)\,dz$, est définie par

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Proposition 4.1 *Soient* $([a,b],\gamma)$ *et* $([c,d],\delta)$ *deux* ***chemins équivalents,*** *et soit* f *une* ***fonction continue*** *sur* $im(\gamma)$ *,alors on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$$

Preuve. *Soit* ϕ *une application bijective de* $[a,b] \to [c,d]$, *vérifiant les conditions de l'équivalence entre les chemins équivalents* γ *et* δ.

La formule de changement de variable dans les intégrales fournit

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_c^d f(\delta(t))\,\delta'(t)\,dt = \int_a^b fo(\delta o\phi(s))\,\phi'(s)\,\delta'(\phi(s))\,ds \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Propriétés

Soient $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ deux chemins, f une fonction **continue** sur $im(\gamma)\cup im(\delta)$.

Proposition 4.2 ***1)-*** *Supposons que* δ *soit le* ***chemin opposé*** *à* γ, *alors*

$$\begin{aligned}\int_\delta f(z)\,dz &= \int_a^b f(\delta(t))\,\delta'(t)\,dt = -\int_a^b (fo\gamma)(a+b-t)\,\gamma'(a+b-t)\,dt \\ &= \int_a^b (fo\gamma)(t)\,\gamma'(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)\,dz.\end{aligned}$$

2)- *Supposons que* $\gamma(a)=\gamma(b)$ *. On peut considérer* $\gamma\cup\delta$*,et on a*

$$\int_{\gamma\cup\delta} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\delta f(z)\,dz$$

3)- *Si $z = a + re^{it}$, on a : $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto a + re^{it}$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{it}\right) rie^{it}dt = ri\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{it}\right) e^{it}dt$$

4)- *Avec les notations de l'exemple du triangle précédent, on a*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz$$

Ces intégrales sont calculées, en utilisant les notations d'exemple du segment, on a

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(z)\,dz &= (b-a)\int_0^1 f((1-t)\,a + tb)\,dt \\ \int_{[b,c]} f(z)\,dz &= (c-b)\int_0^1 f((1-t)\,b + tc)\,dt \\ \int_{[c,a]} f(z)\,dz &= (a-c)\int_0^1 f((1-t)\,c + ta)\,dt \end{aligned}$$

5)- *On pose*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|\,;z \in im(\gamma)\}\,, long(\gamma) = \int_a^b |\gamma\prime(t)|\,dt$$

*On dit que $long(\gamma)$ est la **longueur** de γ. On a alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \|f\|_\infty\, long(\gamma)$$

4.3 Indice

Soit $([a,b], \gamma)$ un **chemin**, alors $im(\gamma)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$,donc $U = \mathbb{C} - \{im(\gamma)\}$, est un ouvert de $\mathbb{C}$.
Soit $r > 0$ tel que $im(\gamma) \subset \overline{D(0,r)}$, L'ensemble $\mathbb{C} - \left\{\overline{D(0,r)}\right\}$ est un **ouvert connexe** de $\mathbb{C}$ contenu dans U. Par suite, U a une unique **composante connexe non bornée.**

Théorème 4.1 *Soient $([a,b], \gamma)$ un **chemin fermé** et $U = \mathbb{C} - \{im(\gamma)\}$, pour $z \in U$, on pose*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt$$

*L'application : $U \to \mathbb{C}, z \mapsto Ind_\gamma(z)$, est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, **constante** sur chaque **composante connexe non bornée** de U.*
*On dit que $Ind_\gamma(z)$ est l'**indice** de z par rapport à γ.*

Remarque 4.2 *Intuitivement,* $Ind_{\gamma}(z)$ *est* " **le nombre de tours** " *(avec un signe) décrit par* $\gamma(t)$ *autour de* z *quand* t *décrit* $[a,b]$.

Proposition 4.3 *Soit* γ *un cercle* $C(a,r)$ *orienté dans le sens direct, on a*

$$Ind_{\gamma}(z) = \begin{cases} 0\,, & si\ |z-a| > r \\ 1\,, & si\ |z-a| < r \end{cases}$$

Preuve. *- Si* $|z-a| > r$, z *appartient à la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} - \{im(\gamma)\}$, *donc* $Ind_{\gamma}(z) = 0$.
- Si $|z-a| < r$, *alors* $Ind_{\gamma}(z) = Ind_{\gamma}(a)$, *toujours d'aprés le théorème précédent, donc*

$$Ind_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = 1$$

d'où le résultat. ■

4.4 Primitive complexe

4.4.1 Problème de primitive

Revenons, maintenant, au problème des primitives, comme nous disposons d'une notion de dérivabilité complexe, il est naturel de chercher à réaliser l'opération inverse. C'est à dire chercher des primitives complexes.
Une primitive de la fonction f est une fonction holomorphe g, telle que : $g' = f$, c'est exactement ce qu'on appelle un problème d'intégration.
Pour les fonctions réelles : une primitive de la fonction f (disons continue) s'obtient en considérant l'intégration $\int_a^x f(t)\,dt$ où a est fixé.
D'une façon unpeu similaire dans le cas complexe, en considérant l'intégrale de f le long d'un chemin joignant z_0 (fixé) à z.
Cependant, la situation ne peut pas être aussi simple que dans le cas réel.

Exemple 4.2 *Considérant la fonction* $f(z) = \frac{1}{z}$, *nous savons que cette fonction est holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$, *mais elle ne peut admettre de primitive sur* $\mathbb{C}^*$.
En effet, si g *était une telle primitive, alors, si on note par* g_0 *la détermination principale du logarithme, et comme* $g' - g_0' = 0$ *sur* $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}\}$, *qui est connexe, on obtient* $g = g_0 + \lambda$, *où* $\lambda \in \mathbb{C}$, *donc* $\exp(g(z) - \lambda) = z, \forall z \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}\}$.
Et par continuité $\exp(g(z) - \lambda) = z, \forall z \in \mathbb{C}^*$. *ce qui est contradictoire avec le fait qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur* $\mathbb{C}^*$.

Donc, la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ *n'admet pas de primitive sur* $\mathbb{C}^*$.
Tandis que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$*, nous savons qu'il existe une détermination du logarithme qui est analytique sur* $D(z_0, |z_0|)$ *et donc* $\frac{1}{z}$ *admet une primitive au voisinage de chaque point de* $\mathbb{C}^*$.
Il faut donc distinguer le fait d'avoir une primitive localement et globalement, d'où on a la définition :

Définition 4.2 *Soit* U *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$ *et* f *continue* $f : U \to \mathbb{C}$. *On dit que*
1)- f *admet une* ***primitive globalement*** *sur* U*, d'il existe* g *holomorphe sur* U*, telle que* $f\prime = g$ *sur* U.
2)- f *admet une* ***primitive localement*** *sur* U*, si pour tout* $z \in U$*, il existe* $r > 0$ *tel que* $D(z, r) \subset U$ *et* g *holomorphe sur* $D(z, r)$*, telle que* $f\prime = g$ *sur* $D(z, r)$ *.*

4.4.2 Cas important

Le cas d'une **série entière** $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n . z^n$ avec $R = +\infty$, est un cas où le problème de trouver **globalement** une **primitive** est évident.
En effet, si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n . z^n$ de rayon infini, la série entière obtenue en intégrant terme à terme est

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n . \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

qui est de rayon de convergence $R = +\infty$.
g est une primitive de f globalement sur $\mathbb{C}$.

Remarque 4.3 *Le même argument montre montre qu'une fonction* ***analytique*** *possède* ***localement des primitives****.*

4.4.3 Critères d'intégrabilité globale

Théorème 4.2 *Soit* U *un* ***domaine*** *et* $f : U \to \mathbb{C}$ ***continue*** *, on a l'****équivalence*** *suivante*
1)$-$ f *admet une* ***primitive globalement*** *sur* U.
2)$-$ *Pour tout* ***chemin fermé*** γ *dans* U*, on a* $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Preuve. **1**) $\Rightarrow$ **2**) Supposons que $f = g'$, avec g **holomorphe** sur U, alors pour tout **chemin fermé** $\gamma : [a, b] \to U$, on a $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b g'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$
et donc, cette intégrale est **nulle** puisque γ est fermé.
2) $\Rightarrow$ **1**) Supposons, maintenant, que **2**) est satisfaite. Soit z_0 et z_1 dans U, et γ_0 et γ_1 deux chemins joignant z_0 à z_1 et γ le chemin obtenu en collant γ_0 au chemin opposé à γ_1, γ étant **fermé** et on a

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 = \int_{\gamma_0} f(z)\, dz - \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

donc $\int_\gamma f(z)\,dz$ de dépend que de l'origine z_0 et de l'extrémité z_1 de γ .
On note $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$ la **valeur commune de ces intégrales,** et on pose $g(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ pour tout $z \in U$.
Soit $z \in U, r > o$ tel que $D(z,r) \subset U$ et $h \in D(0,r)$, comme le segment $[z, z+h]$ est inclus dans U, on a$g(z+h) - g(z) = \int_{[z,z+h]} f(\xi)\,d\xi$
Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue, il existe $\delta < r$ tel que $\sup_{D(z_0,r)} |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$,
et donc si $|h| \leq \delta$,
$|g(z+h) - g(z) - f(z).h| \leq \int_{[z,z+h]} |f(\xi) - f(z)|\,d\xi \leq |h|.\varepsilon$
Ce qui montre que g est dérivable en z et $g'(z) = f(z)$, et donc que g est une primitive de f sur U. ■

Proposition 4.4 *Soit U un **ouvert connexe** (domaine) et $f : U \to \mathbb{C}$ **continue**, on a l'**équivalence** entre :*
1)- *f admet une **primitive globalement** sur U.*
2)- *Pour tout triangle T inclus dans U, on a $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.*
Preuve. *De même, il suffit montrer l'implication $\mathbf{2}) \Rightarrow \mathbf{1})$.*
Soit $z_0 \in U$ et posons, pour tout $z \in U$, $g(z) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi$.
Soit $z \in U$ et $h \in \mathbb{C}$, tel que $z+h \in U$, alors l'intégrale de f le long du bord du triangle de sommets : $z_0, z, z+h$ (inclus dans U par convexité) est nulle, de sorte que

$$g(z+h) - g(z) = \int_{[z,z+h]} f(\xi)\,d\xi$$

Ce qui montre, comme dans la preuve du théorème précédent, que g est holomorphe est $g' = f$ sur U. ■

Théorème 4.3 ***(Théorème de Goursat)***
*Soient U un **ouvert** de $\mathbb{C}$, $w \in U$ et f une fonction **continue** sur U et **holomorphe** dans $U - \{w\}$.*
*Pour tout **triangle** $\Delta \subset U$, on a*

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\,d\xi = 0.$$

Preuve. On note $I(\Delta)$ l'intégrale de f sur $\partial\Delta$.

On a trois cas :
Premier cas : $w \notin \Delta$.
Notons $\Delta = \Delta(a, b, c)$, et $a\prime, b\prime$ et $c\prime$ les milieux respectifs des segments $[b, c]$, $[c, a]$ et $[a, b]$.
On pose Δ (1)= $\Delta(a, c\prime, b\prime)$, Δ (2)= $\Delta(b, a\prime, b\prime)$, Δ (3)= $\Delta(c, b\prime, a\prime)$ et Δ (4)= $\Delta(a\prime, b\prime, c\prime)$.

On a
$$I(\Delta) = I(\Delta(1)) + I(\Delta(2)) + I(\Delta(3)) + I(\Delta(4))$$
Et il résulte que l'un au moins du $I(\Delta(j))\,, j = \overline{1,4},$ vérifie
$$|I(\Delta(j))| \geq \frac{1}{4}$$
Notons Δ_1 un trianle vérifiant cette propriété.
Itérant ce procédé, on constate une suite emboitée de trianles Δ_n vérifiant :
$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N} : \Delta_{n+1} \subset \Delta_n \text{ et } |I(\Delta_{n+1})| \geq \frac{1}{4}|I(\Delta_n)| \\ diam(\Delta_{n+1}) &= \frac{1}{2} diam(\Delta_n)\,,\ long(\partial\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\,long(\partial\Delta_n) \end{aligned}$$
où
$$diam(\Delta_n) = \sup\{|u-v|\,; u,v \in \Delta_n\}\,, n \in \mathbb{N}.$$
et $long(\partial\Delta_n)$ est la longueur du chemin $\partial\Delta_n, n \in \mathbb{N}$.
Comme les Δ_n forment une suite décroissante de fermés, dont le diamètre tend vers zéro ($diam(\Delta_n) = \frac{1}{2^n} diam(\Delta)$), leurs intersection est réduite à un unique point z_0.
Et comme $z_0 \in \Delta \subset U$ et $w \notin U$, alors f est dérivable en z_0. Donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : [D(z_0, r) \subset U \text{ et } z \in D(z_0, r)] \Rightarrow [|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f\prime(z_0)|] \leq \varepsilon |z - z_0|$$
Puisque $diam(\Delta_n) = \frac{1}{2^n} diam(\Delta)$, alors
$$\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N\ :\ \Delta_n \subset D(z_0, r)\,.$$
Alors pour tout $n \geq N$, on a
$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f\prime(z_0)]\,dz$$
(Puisque z et les constantes : $f(z_0)\,, f\prime(z_0)\,, z_0$ ont des primitives dans $\mathbb{C}$.
Donc,
$$\forall n \geq N : \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon.diam(\Delta_n).long(\partial\Delta_n) = \frac{\varepsilon}{4^n} diam(\Delta).long(\partial\Delta)$$
Et par suite :
$$|I(\Delta)| \leq 4^n.\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon.diam(\Delta).long(\partial\Delta)$$
Ceci est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, il vient alors : $I(\Delta) = 0$.

Deuxième cas : w est un sommet de Δ.

On prend, Par exemple $w = a$, et soient $u \in]a, b[$ et $v \in]a, c[$, alors :

$$I(\Delta) = I(\Delta_1) + I(\Delta_2) + I(\Delta_3)$$

où $\Delta_1 = \Delta(a, u, v)$, $\Delta_2 = (u, b, v)$ et $\Delta_3 = (b, c, v)$.
D'après le premier cas, on a $I(\Delta_1) = I(\Delta_2) = 0$, puisque $w \notin \Delta_1$, $w \notin \Delta_2$.
Donc $I(\Delta) = I(\Delta_1)$.
Comme f est continue, il existe $r, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$|f(z)| \leq M, \text{ si } |z - a| \leq r.$$

Si u et v sont assez voisins de a, on a

$$|I(\Delta)| = |I(\Delta_1)| \leq M.long(\Delta_1)$$

Lorsque u et v tendent vers a, on obtient $I(\Delta) = 0$.
Troisième cas : w n'est pas un sommet de Δ et $w \in \Delta$.
Considérons les triangles : $\Delta(w, a, b)$, $\Delta(w, b, c)$, $\Delta(w, c, a)$ .On se ramène au cas 2.
Donc, on aobtenu lr résultat, pour tout $w \in U$. ■

Théorème 4.4 ***(de Cauchy pour un convexe)***
*Soient U un **ouvert convexe** de $\mathbb{C}, w \in U$ et f une fonction **continue** sur U et **holomorphe** dans $U - \{w\}$.*
*Alors f possède une **primitive** dans U, et pour tout **chemin fermé** γ dans U,on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*
Preuve. *D'après les théorèmes (4.2), (4.3) et la proposition (4.5), on obtient facilement le résultat.* ■

4.5 Formule de Cauchy et quelques théorèmes importants

4.5.1 Formule de Cauchy

Théorème 4.5 *Soient $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ et f **holomorphe** sur $D(z_0, r)$, alors pour tout **chemin fermé** γ dans $D(z_0, r)$, tel que $z_0 \notin \Gamma$,on a*

$$f(z_0).Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Preuve. *Pour tout $z \in D(z_0, r)$, soit*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & si\ z \neq z_0 \\ f'(z_0), & si\ z = z_0 \end{cases}$$

*de sorte que g est **continue** sur $D(z_0,r)$ et **holomorphe** sur $D(z_0,r) - \{z_0\}$, donc il résulte, du **théorème** (4.4), que g possède une primitive sur $D(z_0,r)$, et donc son intégrale le long de γ est **nulle**, ce qui prouve **la formule de Cauchy.*** ■

Corollaire 4.1 *Soient U un **ouvert** non vide de $\mathbb{C}$, f **holomorphe** sur U, $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(z_0,r)} \subset U$ et $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.*
Pour tout $z \in D(z_0,r)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Pour $z = z_0$, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

4.5.2 Quelques théorèmes importants sur les fonctions holomorphes

Théorème 4.6 ***(Analycité des fonctions holomorphes)***
*Soient U un **ouvert** non vide de $\mathbb{C}$, f **holomorphe** sur U, alors f est **analytique** sur U. En outre, si $z_0 \in U, R > 0$, tel que $D(z_0,R) \subset U$, alors*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0, R)$$

où, en posant $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt, \ \forall r \in]0, R[$$

En particulier, on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0, R[$.

Preuve. Soit $r \in]0, R[$, on a alors $\overline{D(z_0,r)} \subset U$, soit $z \in D(z_0,r)$ on obtient, d'après le corollaire précédent,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} du \tag{1}$$

On observe ensuite que pour $u \in \Gamma_r = \gamma_r([0, 2\pi]) = \partial D(z_0, r)$, $|z - z_0| < r = |u - z_0|$, et on a

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{(u - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}\right)} = \frac{1}{u - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0}\right)^n$$

donc

$$\frac{f(u)}{u-z} = \frac{1}{u-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n .f(u)$$

Si $u \in \Gamma_r$, on a

$$\left| \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n .f(u) \right| \leq M_r. \left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n, \; M_r = \sup_{\Gamma_r} |f|$$

Et comme $|z-z_0| < r$, la série de terme général $\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n .f(u)$ converge normalement sur Γ_r, de sorte que, l'on peut intégrer terme à terme dans la formule de Cauchy (1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du \right) (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}} i.re^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'analycité de f, notons que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \xi^n$ est au moins r, puisque $|a_n| r^n < M_r$. ■

Corollaire 4.2 ***(Inégalité de Cauchy)***
*Soient U un **ouvert** non vide de $\mathbb{C}$, f **holomorphe** sur U, $z_0 \in U$, $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset U$, alors pour tout $r \in]0, r[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n}{r^n} \sup_{t \in [0,2\pi]} \left| f\left(z_0 + r.e^{it}\right) \right| = \frac{n}{r^n} \sup \sup_{\partial D(z_0,r)} |f|$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème précédent. ■

Théorème 4.7 *Soient U et V deux **ouverts** de $\mathbb{C}$, $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$, si f est **analytique** sur U et g est **analytique** sur V, alors gof est **analytique** sur U.*

Preuve. Comme f et g sont deux fonctions **analytiques** et la **composition est définie**, alors gof est **holomorphe**, donc d'après le théorème de Cauchy gof est **analytique**. ■

Théorème 4.8 ***(de Liouville)***
*Toute fonction **holomorphe** et **bornée** sur $\mathbb{C}$ tout entier est **costante**.*
Preuve. *On pose $M = \sup_{\mathbb{C}} |f|$, il résulte des **inégalités de Cauchy** et du fait que f est **entière** que pour tout $z \in \mathbb{C}$, et tout $r > 0$, on a*

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

En faisant tendre r vers $(+\infty)$, on en déduit que $f' = 0$ sur $\mathbb{C}$. ■

Remarque 4.4 *En déduit du théorème de Liouville que, si P était un* ***polynôme non constant*** *ne s'annulant pas, alors $\frac{1}{P}$ serait une* ***fonction holomorphe*** *et* ***bornée*** *sur $\mathbb{C}$, et donc devrait être constante.*

Théorème 4.9 ***(de Morera)***
Soient U un ***ouvert*** *non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction* ***continue,*** *alors si f admet* ***localement une primitive*** *dans U, f est* ***holomorphe sur*** *U.*
Preuve. *Si f admet une primitive localement sur U, pour chaque $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ et g* ***holomorphe*** *sur $D(z_0, r)$, telle que $g' = f$ sur $D(z_0, r)$.*
Il résulte du ***théorème de Cauchy*** *que g est* ***analytique,*** *donc $g' = f$ est aussi* ***analytique,*** *en particulier f est* ***holomorphe.*** ■

Théorème 4.10 *Soient U un* ***ouvert*** *non vide de $\mathbb{C}$, $\alpha \in U$ et f une fonction* ***continue*** *sur U et* ***holomorphe*** *sur $U - \{\alpha\}$, alors f est* ***holomorphe*** *sur U.*

Preuve. Nous savons, de ce qui précéde, que f admet **localement une primitive** sur U, et donc on déduit, du **théorème de Morera**, que f est **holomorphe** sur U. ■

Chapitre 5

Singularité, théorème des résidus et ses applications

5.1 Séries de Laurent

Définition 5.1 *Pour $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$, on note $C(a, R_1, R_2)$* ***la couronne***

$$C(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$$

Remarque 5.1 *On note que R_1 peut prendre la valeur 0, et que R_2 peut prendre $(+\infty)$.*
- Pour $R_1 = 0$, $C(a, 0, R_2) = D^*(a, R_2) = D(a, R_2) - \{a\}$ est le ***disque épointé.***
- Pour $R_2 = +\infty$, $C(a, R_1, +\infty)$ est le complémentaire du disque fermé $\overline{D}(a, R_1)$.

Séries de Taylor et séries de Laurent

Les fonctions analytiques peuvent être représentées par des séries entiéres, et par leur généralisation, par des séries de puissances positives et négatives.

Séries de Taylor

La formule de **Taylor** connue dans l'analyse réelle peut être étendue aux fonctions complexes.

D'après le **théorème de Taylor** ; si f est une fonction **analytique** à l'interieur d'un cercle $C(a, R)$, on a, pour chaque point à l'interieur de $C(a, R)$

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(z - z_0) + \frac{f''(a)}{2}(z - z_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n}(z - a)^n + ...$$

Cette série est convergente vers la fonction $f(z)$ lorsque $|z - a| < R$.

Autrement dit, chaque fonction analytique dans le disque ouvert $D(a,R)$, peut être représentée, dans ce disque, par sa **série de Taylor**

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$$

où les coefficients c_n sont donnés par la formule

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\quad n=0,1,2,....$$

avec C est un **chemin fermé simple** contenant le point a, et il est à l'interieur au cercle $|z-a|=R$.

Exemple 5.1 ***1)-*** $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$, $|z-z_0|<+\infty$
2)- $\sin(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-z_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z-z_0|<+\infty$.
3)- $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n$, $|z-z_0|<1$.
4)- $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-z_0)^n$, $|z-z_0|<1$.
5)- $\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-z_0)^n}{n}$, $|z-z_0|<1$.
6)- $(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}(z-z_0)^n$, $|z-z_0|<1$.
En particulier, $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-z_0)^n$, $|z-z_0|<1$.

Séries de Laurent

Si une fonction f n'est pas analytique au point $z_0\in\mathbb{C}$, on ne peut pas appliquer le **théorème de Taylor** en ce point. Cependant, il est souvent possible de trouver pour $f(z)$ une représentation en série faisant intervenir à la fois des puissances positives et négatives de $(z-z_0)$.
De telle séries sont appelées **séries de Laurent.**

Théorème 5.1 ***(de Laurent)***
*Si C_{R_1} et C_{R_2} sont deux cercles orientés positivement centrés au point z_0,tels que C_{R_1} soit à l'interieur de C_{R_2} , et si f est une **fonction analytique** sur C_{R1} et sur C_{R_2} ainsi que dans la **couronne** $C(z_0,R_1,R_2)$, alors, en chaque point z de cette couronne, $f(z)$ est représentée par le développement*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

où

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},\qquad n\geq 0 \tag{1}$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(z)\, dz}{(z-z_0)^{-n+1}}, \quad n \geq 1 \tag{2}$$

avec C est un chemin fermé entourant z_0, et situé dans la couronne.

*Une telle série est appelée **série de Laurent.***

*- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ dans le développement de Laurent est appelée **la partie reguliere** et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ est appelée **la partie prncipale** de ce developpement.*

Exemple 5.2 *Soit la fonction $f(z) = z^2. \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\cos(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, donc $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on a $\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n)!.z^{2n}}$.On obtient, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2. \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= z^2. \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n)!.z^{2n}} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n)!.z^{2n-2}} \\ &= -\frac{1}{2} + z^2 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+2)!.z^{2n}} \end{aligned}$$

Remarque 5.2 ***- Dans la pratique**, pour la recherche des coefficients a_n et a_{-n} , on tâche d'éviter l'utilisation des formules (1) et (2), car cela entraîne des calculs encombrants. **Habituellement**, si seulement cela est possible, on met en oeuvre les **developpements** tout prêt en série de **Taylor des fonctions élémentaires.***

*- La série de Laurent **converge** dans le domaine dans le quel les séries : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ sont convergentes.*

*- Le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ est déterminé par la limite $R = \frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$ ou par $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.*

*et le **domaine de convergence** pour cette série est donné par $D.C = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| < R\}$.*

*- Tandis que, le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ est déterminé par la limite $r = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|}$.*

*et le **domaine de convergence** est donné par $D.C = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| > r\}$.*

*- Le **domaine de convergence** de la **série de Laurent** est donné par $D.C = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-z_0| < R\}$,où $r < R$.*

Exemple 5.3 *Soit la série de Laurent $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2i)^n}{6^n}$.*

- Pour la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$, on a $a_{-n} = (3+4i)^n$, et donc $a_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}$.

On a

$$r=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|}=r=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|(3+4i)^{n+1}\right|}{\left|(3+4i)^{n}\right|}=5$$

- *Et pour la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2i)^n}{6^n}$, *on a* $a_n=\frac{1}{6^n}$ *et donc* $a_{n+1}=\frac{1}{6^{n+1}}$. *Et par suite*

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=6$$

Le ***domaine de convergence*** *de cette série de Laurent est* $D.C=\{z\in\mathbb{C};\ 5<|z+2i|<6\}$.

5.2 Points singuliers isolés

Définition 5.2 *Soit* $z_0\in\mathbb{C}$, *on dit que* z_0 *est* ***une singularité isolée*** *de* $f(z)$*, s'il existe* $r>0$*, tel que* $f(z)$ *est* ***holomorphe*** *sur* $D^*(z_0,r)$. *(où* $D^*(z_0,r)=D(z_0,r)-\{z_0\}$ *)*

Classification des points singuliers

- Soit z_0 une **singularité isolée** de $f(z)$, par définition, il existe $r>0$, tel que $f(z)$ est holomorphe sur $D^*(z_0,r)$, et grâce au théorème de Laurent, on peut écrire

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\ z\in D^*(z_0,r).$$

Il y a, alors trois cas à distinguer

A)- Point singulier artificiel

- Si pour tout $n<0$, $a_n=0$, $f(z)$ s'étend en une fonction **holomorphe** sur $D(z_0,r)$.

B)- Pôle

- S'il existe un **nombre fini** de $n<0$, tels que $a_n\neq 0$, ainsi il existe $n_0\geq 1$ tel que $a_{-n_0}\neq 0$, on dit que z_0 est **un pôle d'ordre** n_0 de $f(z)$.

C)- Singularitée essentielle

- Il existe **une infinité** de $n<0$, tels que $a_n\neq 0$, on dit alors que z_0 est une **singularitée essentielle** de $f(z)$.

Exemple 5.4 ***1)-*** *La fonction* $f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}$, *a une singularitée isolée en* 0, *c'est* ***un pôle d'ordre 2.***
2)- *La fonction* $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, *a une singularitée isolée* ***artificielle*** *en* 0, *puisque*

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z}&=\frac{1}{z}.\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)}\right)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+.....\right)\\&=1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}+.....\end{aligned}$$

***3)-** La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, a une singularitée **essentielle** en $z_0 = 1$, puisque*

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n(z-1)^n}.$$

Définition 5.3 ***(Fonctions méromorphes)***
*Soit Ω **un ouvert** de $\mathbb{C}$, on dit que la fonction $f(z)$ est **méromorphe** sur Ω, si f est **holomorphe** sur Ω sauf **(éventuellement)** en des points **singuliers isolés** qui sont des **pôles** de $f(z)$.*

5.3 Résidus des fonctions

Définition 5.4 *Soit z_0 un **point singulier isolé** d'une fonction $f(z)$, on appelle **résidu** de la fonction $f(z)$ au point z_0, le nombre désigné par le symbole Res $f(z_0)$ qui est vérifie*

$$Res\ f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)\, dz.$$

- On utilise également la nototion Res$[f(z), z_0]$, et on prend comme chemin fermé γ le cercle de centre z_0 et de rayon assez petit pour que ce cercle soit dans le domaine d'analycité de f et ne contient aucun point singulier autre que z_0.

- Le résidu de la fonction est donné par le **coefficient de la première puissance négative** dans le développeent en série de laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = z_0$.
C-à-d :

$$\text{Res } f(z_0) = a_{-1}$$

- Le résidu en un point **singulier éliminable (artificiel)** est **nul.**
- Le résidu en un point **pôle d'ordre** n est donné par la formule

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{f(z).(z-z_0)^n\}$$

- Si la fonction $f(z)$ peut être présentée dans le voisinage du point z_0 comme **quotient** de deux fonctions analytiques $\frac{\Phi(z)}{\Psi(z)}$, et de plus $\Phi(z_0) \neq 0, \Phi(z_0) = 0$, alors que $\Psi'(z_0) \neq 0$, c-à-d z_0 est un **pôle simple** de $f(z)$, alors

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{\Phi(z_0)}{\Psi'(z_0)}$$

- Si le point z_0 est un point **singulier essentiel** de $f(z)$, pour obtenir $\mathrm{Re}\, s\ f(z_0)$, il faut trouver le coefficient a_{-1} dans le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage du point z_0.

Exemple 5.5 *Soit la fonction* $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$, ***les points singuliers** de* $f(z)$ *sont* $z_0 = -1, z_1 = 2.$
- *Le point* $z_0 = -1$ *est un **pôle d'ordre 3** pour* $f(z)$, *donc*

$$Res\ f(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to (-1)} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)} (z+1)^3 \right) = -\frac{17}{54.e}$$

- *Le point* $z_1 = 2$ *est un **pôle simple**, donc*

$$Res\ f(2) = \lim_{z \to 2} \left[\frac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)} . (z-2) \right] = \frac{e^3}{27}.$$

5.4 Théorème des résidus

Théorème 5.2 ***(des résidus)***

Soit $f(z)$ *une fonction **analytique (holomorphe)** sur la frontière* F *d'un **domaine*** D *et partout à l'interieur de ce domaine, sauf en un **nombre fini de points singuliers*** $a_1, a_2, ...a_n$, *alors on a*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}s\ f(a_k)$$

Preuve. On entoure les points singuliers de cercles C_k orientés positivement, intérieurs à F et assez petits pour n'avoir aucun point en commun [voire la figure] .
Les cercles C_k et le chemin fermé simple F forment ensemble la frontière d'une **région fermée** dans la quelle f est **analytique (holomorphe).** D'après le théorème de Cauchy[Théorème $(4-4)$] , on a

$$\oint_F f(z)\, dz - \oint_{C_1} f(z)\, dz - \oint_{C_2} f(z)\, dz - ..... - \oint_{C_n} f(z)\, dz = 0$$

donc

$$\oint_F f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\, dz$$

Et comme

$$\oint_{C_k} f(z)\, dz = 2\pi i \text{ Res } f(a_k)$$

Il résulte

$$\oint_F f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res } f(a_k)$$

■

Exemple 5.6 ***1)-*** *Soit* $I = \int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \left(\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} \right) dz$, *dans le domaine* $D : |z-i| < \frac{3}{2}$ *la fonction* $\left(\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} \right)$ *possède deux points singuliers ;* $z_1 = i$ *qui est un* ***pôle simple****, et* $z_2 = 0$ *qui est un point* ***essentiel.***
On a

$$\textit{Res } f(i) = \lim_{z \to i} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z^2+1)'} = \lim_{z \to i} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{2z} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Le ***développement en série de Laurent*** *de* $f(z)$ *au voisinage de* $z = 0$*, ne contient que des* ***puissances paires****, car* $f(z)$ *est une* ***fonction paire****, et par suite*

$$\textit{Res } f(0) = 0$$

D'après le ***théorème des résidus****, on obtient*

$$\begin{aligned} \int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \left(\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} \right) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \textit{Res } f(z_k) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i} + 0 \right) = \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

2)- Soit $I = \int_{|z|=1} z.tg(\pi z)\, dz$, la fonction $f(z) = z.tg(\pi z)$ possède une infinité des points singuliers ; $z_k = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}$, seuls les deux points $z_0 = -\frac{1}{2}$ et $z_1 = \frac{1}{2}$ appartiennent à l'interieur du cercle unité, qui sont des pôles simples. On a donc

$$\text{Res } f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} z. \frac{\sin(\pi z)}{(\cos(\pi z))'} = \lim_{z \to \frac{1}{2}} z. \frac{\sin(\pi z)}{-\sin(\pi z)} = -\frac{1}{2}.$$

Et

$$\text{Res } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} z. \frac{\sin(\pi z)}{(\cos(\pi z))'} = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} z. \frac{\sin(\pi z)}{-\sin(\pi z)} = \frac{1}{2}$$

Il résulte que

$$\int_{|z|=1} z.tg(\pi z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \text{Res } f(z_k) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Résidu d'une fonction par rapport au point à l'infini

Définition 5.5 *On dit qu'une fonction* $f(z)$ *est* ***analytique (holomorphe) au point à l'infini*** $z = \infty$*, si la fonction* $\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ *est* ***analytique (holomorphe)*** *au point* 0.

Exemple 5.7 *Soit la fonction* $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ *.*
$f(z)$ *est analytique au point* $z = \infty$*, puisque* $\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sin(\xi)$ *est analytique au point* $z = 0$.

Définition 5.6 ***(Point singulier isolé à l'infini)***
*Soit $f(z)$ une fonction est **analytique (holomorphe)** dans un voisinage du point à l'infini (à l'exception à $z = \infty$ lui même).*
*- Le point $z = \infty$ est appelé point **singulier isolé** de la fonction $f(z)$, si cette fonction ne possède pas d'autre points singuliers dans un certain voisinage de ce point.*

Exemple 5.8 *A l'infinité, la fonction $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ possède une singularité non isolée, puisque les pôles $z_k = k\pi$ de cette fonction s'accumulent à l'infini, quand k tend vers (∞) .*

Définition 5.7 *On dit que $z = \infty$ est un point singulier **éliminable (artificiel)**, un **pôle** ou un point **essentiel** de la fonction $f(z)$, si la limite $\lim_{z\to\infty}$ est respectivement **finie, infinie** ou si elle **n'existe pas**.*

Théorème 5.3 *- Si $z = \infty$ est un point **singulier éliminable** d'une fonction $f(z)$, le développement en série de Laurent au voisinage de ce point **ne contient pas de puissaces positives** de z.*
*- Si $z = \infty$ est un **pôle,** le développement en série de Laurent au voisinage de ce point contient un **nombre fini** de **puissaces positives** de z.*
*- Si $z = \infty$ est un point **singulier essentiel** d'une fonction $f(z)$, le développement en série de Laurent au voisinage de ce point contient un **nombre infini de puissaces positives** de z.*
- En plus, on appelle développement en série de Laurent d'une fonction $f(z)$ au voisinage de $z = \infty$, un développement de ce type qui converge partout en dehors d'un disque de centre $z = 0$ et d'un rayon R assez grand (sauf peut être au point $z = \infty$).

Définition 5.8 *Soit $f(z)$ une fonction est **analytique (holomorphe)** dans un voisinage du point à l'infini (à l'exception à $z = \infty$ lui même).*
*On appelle **résidu** de la fonction $f(z)$ **au point à l'infini,** la grandeur*

$$Res\ f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)\,dz$$

où γ^- est un cercle suffisamment grand, $|z| = \rho$ parcouru dans le sens horaire, et on a

$$Resf(\infty) = -a_{-1}.$$

Exemple 5.9 *Pour la fonction $f(z) = \frac{z+1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$.*
Cette expression peut être considérée en tant que developpement en série de Laurent au voisinage de $z = \infty$.
On a évidement $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$, donc $z = \infty$ est un point singulier éliminable, et on a $a_{-1} = 1$, donc Res $f(\infty) = -a_{-1} = -1$.

Remarque 5.3 *L'exemple précédent, montre que le* ***résidu*** *d'une fonction par rapport à un* ***point singulier éliminable*** *à l'infini,* ***peut être différent de zéro.***

Théorème 5.4 *Soit $f(z)$ une fonction possédant un nombre fini de points singuliers dans $\overline{\mathbb{C}}$, alors la somme de tous ses résidus, y compris le résidu à l'infini est nulle.*
C-à-d : Si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des points singuliers de la fonction $f(z)$, alors

$$\textit{Res}\ f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \textit{Res}\ f(a_k) = 0$$

Ou

$$\textit{Res}\ f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \textit{Res}\ f(a_k)$$

Exemple 5.10 *Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ et $\gamma : |z| = 2$.*
La fonction $f(z)$ possède quatre pôles ; z_1, z_2, z_3 et z_4 qui sont les racines de l'équation $1 + z^4 = 0$, et elles sont tous dans l'interieur de $|z| = 2$.
Au voisinage du point à l'infini, $f(z)$ a le développement

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4}.\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} + ...$$

donc

$$\textit{Res}\ f(\infty) = -a_{-1} = 0$$

Il résulte

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \textit{Res}\ f(z_k) = 2\pi i\ .\textit{Res}\ f(\infty) = 0$$

5.5 Applications du théorème des résidus au calculs des intégrales

5.5.1 Intégrales des fonctions rationnelles

Soit $f(z)$ une fonction rationnelle de la forme $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, où $P_m(x)$ et $Q_n(x)$ sont deux polynômes de degrès m et n respectivement.
Si $f(z)$ est continue sur l'axe réel tout entier ($Q_n(x) \neq 0$), et si $n \geq m+2$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sigma \tag{3}$$

où σ est la somme des résidus de la fonction $f(x) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ en tous les pôles situès dans le demi-plan supérieur.

Exemple 5.11 *Soit l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^2}$$

On pose $f(x) = \frac{x^4}{(x^2+1)^2}$, *on obtient alors*

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^2}$$

On introduit la fonction $f(z) = \frac{z^4}{(z^2+1)^2}$, *alors* $f(z)$ *possède un pôle d'ordre* 2 *dans le demi-plan supérieur au point* $z_0 = i$, *et on a*

$$\begin{aligned} Res f(i) &= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-i)\right] = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^4}{(z+i)^2}\right] \\ &= \lim_{z \to i}\left[\frac{2z^4 + 4.z^3.i}{(z+i)^3}\right] = \frac{3}{4} i \end{aligned}$$

En utilisant la formule (3), *on obtient*

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^4 dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[2\pi i . \frac{3}{4} i\right] = -\frac{3\pi}{4}$$

5.5.2 Intégrales du type $\int_0^\infty R(x) . \cos \lambda x \ dx$, $\int_0^\infty R(x) . \sin \lambda x \ dx$

Où $R(x)$ est une fonction rationnelle, $\lambda > 0$.
On a le lemme suivant

Lemme 5.1 ***(de Jordan)***
Soit $g(z)$ *une fonction analytique dans le demi-plan supérieur (* $0 < \arg z < \pi$ *) sauf en un nombre fini de points sinuliers, telle que* $\lim_{|z| \to 0} g(z) = 0$, *alors*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

où Γ_R *est un demi cercle de rayon* R *, de centre* 0 *qui est situé dans le demi-plan supérieur.*

Exemple 5.12 *Soit à calculer l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{x.\sin(x)}{x^2+k^2}dx$, *avec* $k>0$.
On introduit la fonction $f(z)=\frac{z.e^{iz}}{z^2+k^2}$, *on remarque que toute suite que si* $z=x$, $f(z)$ *coincide avec la fonction* $\varphi(x)=\frac{x.\sin(x)}{x^2+k^2}$.
Considèrons le chemin Γ_R *représenté au figure.*
Si R *est suffisament grand, on a pour tout* $z\in\Gamma_R$

$$|g(z)|=\left|\frac{z.e^{iz}}{z^2+k^2}\right|\leq\left|\frac{R^2}{R^2-k^2}\right|\rightarrow_{R\rightarrow+\infty}0$$

D'après le ***lemme de Jordan****, on a*

$$\lim_{R\rightarrow+\infty}\int_{C_R}\frac{z.e^{iz}}{z^2+k^2}dz=0$$

Et du théorème des résidus, on obtient pour tout $R>K$

$$\int_{-R}^{R}\frac{x.e^{ix}}{x^2+k^2}dx+\lim_{R\rightarrow+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z.e^{iz}}{z^2+k^2}dz=2\pi i\sigma \qquad (4)$$

où

$$\sigma=Res_{z=ik}\left[\frac{z.e^{iz}}{z^2+k^2}\right]=\lim_{z\rightarrow ik}\left[(z-ik)\frac{z.e^{iz}}{(z-ik)(z+ik)}\right]=\frac{1}{2}e^{-k}$$

En passant à la limite, quand R *tend vers l'infini dans* (4), *on obtient*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x.e^{ix}}{x^2+k^2}dx=\left(\frac{1}{2}e^{-k}\right).2\pi i$$

Et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x.\cos x}{x^2+k^2}dx+i.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x.\sin x}{x^2+k^2}dx=\pi ie^{-k}$$

Et par suite, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x.\sin x}{x^2+k^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x.\sin x}{x^2+k^2}dx=\frac{\pi}{2.e^k}$$

5.5.3 Intégrale contenant une fonction exponentielle

Exemple 5.13 *Caluler les intégrales de* ***Fresnel****;* $I_1=\int_0^\infty\cos^2x.dx$ *et* $I_2=\int_0^\infty\sin^2x.dx$, *sachant que* $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Considérons la fonction $f(z)=e^{iz}$, *et le chemin indiqué sur la figure*

A l'interieur de ce chemin, la fonction $f(z)$ *est analytique, et d'après le théorème de Cauchy on a*

$$\int_{OABO}e^{iz^2}dz=\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_{C_R}e^{iz^2}dz+\int_{BO}e^{iz^2}dz=0 \qquad (5)$$

On va montrer d'abord, que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iz^2}dz = 0$$

Si on pose $z^2 = \xi$, *on obtient* $dz = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}}$ *et*

$$\int_{C_R} e^{iz^2}dz = \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}}d\xi$$

On a $g(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ *satisfait les conditions de lemme de Jordan, donc*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}}d\xi = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iz^2}dz = 0$$

- ***Sur le segment*** $BO : z = \rho.e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z^2 = \rho^2.e^{i\frac{\pi}{2}} = i.\rho^2$, $0 \leq \rho \leq R$.

Donc

$$\int_{BO} e^{iz^2}dz = \int_R^0 e^{-\rho^2}e^{i\frac{\pi}{4}}d\rho = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-\rho^2}d\rho$$

En passant à lalimite dans (5), *pour* R *tend vers l'infini, on obtient*

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-\rho^2}d\rho = e^{i\frac{\pi}{4}}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc, comme

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = \int_0^\infty \cos^2(x)\,dx + i\int_0^\infty \sin^2(x)\,dx$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos^2(x)\,dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\ \int_0^\infty \sin^2(x)\,dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] F. Bayenet et C. Margaria, problèmes de mathèmatiques appliquées ; Fonctions d'une variable complexe, Ellipses, Paris, 1986.

[2] P. Dolbeault, Analyse complexe, Masson, Paris, 1999.

[3] D. Feyel et A. de la pavadelle, Exercices sur les fonctions analytiques, Librairie Armond Colin, Paris.

[4] J. Genet et G. Pupion, Analyse moderne 2, Librairie Vuibert, Paris 1974.

[5] R. Godement, Analyse mathématique, Springer, Paris, 2000.

[6] M. Krasnov, A. Kissélev et G. Makarenko, Fonction d'une variable complexe, calcul opérationnel et théorie de la stabilité, Mir- Moskou, 1985.

[7] W. Rudin, Analyse réelle et complexe : Cours et exercices, Dunod, Paris, 1998.

[8] M. R. Spiegel, Variables complexes : Cours et problèmes, Série Schaum, mc Graw- Hill Inc, New York, 1973.

[9] P. Tauvel, Analyse complexe : Exercices corrigés, Dunod, Paris, 1999.

[10] P. Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3, Dunod, Paris, 2006.