**Université L'arbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi** **Année : 2018/2019**

**Faculté de sciences exactes et de sciences de la nature et de la vie**

**Département : MI** **Matière : ALGEBRE 2**

## Série 2: Applications linéaires

### Exercice 1

Pour les applications linéaires suivantes, déterminer $\operatorname{Ker} f_i$ et $\operatorname{Im} f_i$ . En déduire si $f_i$ est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y)$$
$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$$

### Exercice 2

Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1) \ , \ f(1,1,0) = (1,0) \text{ et } f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer noyau et image de $f$

### Exercice 3

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$.

Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

### Exercice 4

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que $u$ est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$ ?