Université L'arbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi **Année : 2018/2019**
Faculté de sciences exactes et de sciences de la nature et de la vie
Département : MI **Matière : ALGEBRE 2**

Serie 1: Espaces vectoriels

Exercise 1 *Déterminer les quels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - z = x + y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 - z^2 = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ e^x e^y = 0\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z(x^2 + y^2) = 0\}$.
5. Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, E_5, E_6 sont des sous-espaces vectoriels de E?
E_5 : *L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.*
E_6 : *L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$.*

Exercise 2 *Réecrivez les sous-espaces vectoriels suivants sous la forme $Vect(v_i)$, (déterminer une famille génératrice)*
1. $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y - z = 0\right\}$,
2. $F_2 = \left\{(2s + t, s - t, s + t) / (s, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$
3. $F_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\right\}$
4. $F_4 = F \cap G$ *avec* $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - y - 2z = 0\right\}$ *et* $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ 3x - y - z = 0\right\}$
5. $F_5 = \mathbb{R}_2[X]$,
6. $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0\}$,
7. $F_7 = \left\{P' / P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ où } n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercise 3 *1. Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $v_2 = (2, 1, -1, 0)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $v_3 = (3, 1, -1, 1)$ et $v_4 = (5, 2, -2, 1)$.*
2. Déterminer la dimension de ce sous espace vectoriel.

Exercise 4 *Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0, 1)$ et* $e_3 = (0, 0, 0, 1)$.
1. Quelle est la dimension de E ?
2. Compléter cette famille en sorte d'avoir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercise 5 *Soient $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\right\}$ et $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y - 2z = 0\right\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$, on admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
Soient $a = (1, 0, 1)$, $b = (1, 1, 1)$ et $c = (0, 2, 1)$
1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3) Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4) Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6) Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercise 6 *Dans $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'espace des fonctions réelles), on pose:*
$F = \{\text{fonctions paires}\}$ *et* $G = \{\text{fonctions impaires}\}$
1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.