Classe : $2^{ème}$ *Année Maths* | *Univesité L'arbi Ben m'hidi*
L. M. D 2018 / 2019 | *Oum el bouaghi*
Module : *Analyse 4* | *Département de Mathématique*
Enseignante : *Soula – Y*

Série d'exercices $N^0 2$

Exercice 1 :
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions données
1) $f(x,y) = y^5 - 3xy$, **4)** $f(x,y) = \frac{x}{y}$,
2) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$, **5)** $f(x,y) = x^y$,
3) $f(x,y) = x\cos(e^{xy})$, **6)** $f(x,y,z) = x\cos(xz) + \ln(2 - \sin^2(y+z))$.

Exercice 2 :
Calculer $Z'(t)$ et $W'(t)$
1) $Z(t) = f(x(t), y(t))$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = e^t$;
2) $Z(t) = f(x(t), y(t))$, $f(x,y) = \cos(x + 4y)$, $x(t) = 5t^4$, $y(t) = \frac{1}{t}$;
3) $W(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, $f(x,y,z) = xe^{\frac{y}{z}}$, $x(t) = t^2$, $y(t) = 1 - t$, $z(t) = 1 + 2t$;
4) $W(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$, $z(t) = \tan(t)$.

Exercice 3 :
Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on note g son expression en coordonnées polaires

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = f(x,y).$$

Calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 4 :
Vérifier, que les fonctions f: $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué:
1) $f(x,y) = xy - 3x^2$ en $(1,2)$; **2)** $f(x,y) = xy - 3y^2$ en $(2,1)$;
3) $f(x,y) = xy + 3y^2$ en $(2,1)$; **4)** $f(x,y) = xy - 2y^2$ en $(-2,3)$;
5) $f(x,y) = y\sqrt{x}$ en $(4,1)$; **6)** $f(x,y) = |y|\ln(1+x)$ en $(0,0)$;

Exercice 5 :
Soit f la fonction définie

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\bigtriangledown f(x,y)$.
2) Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.
3) Que pouvez-vous déduire du calcul de $\partial_{xy} f(0,0)$ et de $\partial_{yx} f(0,0)$?

Exercice 6 :
Soit f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Est- elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\bigtriangledown f(x,y)$.
2) La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
3) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$

<u>Exercice 7</u> :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) La fonction f est- elle continue en $(0,0)$?
2) Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ existent.
3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

<u>Exercice 8</u> :
Soit f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Est- elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2) Est- elle dérivable sur $\mathbb{R}^2$?
3) Est- elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
4) Est- elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

<u>Exercice 9</u> :
Soit f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

1) Montrer que f continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $\bigtriangledown f$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\diagdown\{(1,0)\}$ calculer en suite $\bigtriangledown f\ (1,0)$.
3) Montrer que f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\diagdown\{(1,0)\}$.
4) f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$?
5) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2\diagdown\{(1,0)\}$?
6) Montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$.

<u>Exercice 10</u> :
Soit f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^3\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Est- elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\bigtriangledown f(x,y)$.
2) La fonction f, est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
3) Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11 :