*Classe* : $2^{ème}$ *Année Maths* — *Univesité L'arbi Ben m'hidi*
*L. M. D* 2018 / 2019 — *Oum el bouaghi*
*Module* : *Analyse 4* — *Département de Mathématique*
*Enseignante* : *Soula – Y*

Sérié d'exercices $N^0 1$

**Exercice 1** :
Dans chaque cas, déterminer et représenter les domaines de définition des fonctions données

**1)** $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-y}{y}}$ **5)** $f(x,y) = \frac{x}{y}$

**2)** $f(x,y) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-y}}$ **6)** $f(x,y,z) = (\frac{1}{x^2+y^2+z^2}, \sqrt{1-x^2-y^2-z^2})$

**3)** $f(x,y) = \ln(x+y)$ **7)** $f(x,y) = \ln(x-y^2) - 2\sqrt{y-x^2}$

**4)** $f(x,y) = x(\ln(x))^2 + y^2$ **8)** $f(x,y) = \frac{\ln x}{x^2+y^2-9}$.

---

**Exercice 2** :
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}.$$

Calculer si elle existe la limite de $f$ pour $(x,y)$ tend vers $(0,0)$.

---

**Exercice 3** :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}.$$

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de trois façons:

**1)** D'après la définition.
**2)** D'après la théorème de comparaison.
**3)** En utilisant les coordonnées polaires.

---

**Exercice 4** :
Calculer la limite si elle existe où montrer qu'elle n'existe pas

**1)** $f(x,y) = \frac{y\sin(x-1)}{(x-1)^2}$ en $(1,2)$ **3)** $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ en $(0,0)$

**2)** $f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$ en $(0,0)$ **4)** $f(x,y) = \frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$

---

**Exercice 5** :
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrons que la restriction de $f$ à toute droite passnt par l'origine est continue mais que $f$ n'est pas continue à l'origine.

**Exercice 6 :**

Montrer que les fonctions suivantes sont-elles continue en $(0,0)$.

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

---

**Exercice 7 :**
Montrons que les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définies par

**1)** $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ **2)** $g(x,y) = \frac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2}$

ne sont pas prolongeables par continuité en $(0,0)$.

---

**Exercice 8 :**

Etudiez la continuité de la fonction suivante $f$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

---

**Exercice 9 :**

Etudiez la continuité de la fonction suivante $f$ sur $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$