RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université L'arbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences exactes et de sciences de la nature et de la vie

Département de Mathématiques et Informatiques

Cours du module : Algèbre2

Première année

Guerarra Sihem

2017 / 2018

Table des Matières

Introduction

Historiquement, l'algèbre linéaire naît de l'étude des systémes linéaires. Abordés dès 1678 par Leibnitz, Maclaurin en 1748 donne les formules de résolution à deux ou trois inconnues, complétées dans le cas générale par Cramer en 1754. A partir de là Vandermonde puis Laplace ont l'idée de définir un déterminant d'ordre n par récurrence sur n, en le développant par rapport à une ligne ou une colonne.

D'autre part, dans les *Recherches Arithmétiques*, Gauss avait adopté, pour désigner une transformation linéaire, une notation sous forme de tableau : la notation matricielle. Il y définit même le produit de deux matrices. ce passage devait suggérer à Cauchy la règle du produit de deux déterminants, publiée en 1815 dans un mémoire.

Jusqu'alors, les concepts de déterminant et de matrice sont encore très liés. En 1826, Cauchy cherchant à déterminer les axes principaux d'une surface du second degré, introduit le polynôme caractéristique d'une matrice. Avec Cayley et Sylvester, au milieu du dix-neuvième siècle, la théorie des matrices s'était développée.

On en est encore au plan et à l'espace. La familiarisation des mathématiciens aux déterminant et aux matrices s'accroissant, elle suggère à ceux ci la conception d'un espace à n dimensions. Mais il fallait oser ! Vers 1843-1845, Cayley et Grassmann franchissent le pas et parlent d'espaces à n dimensions. Cayley se fonde sur la généralisation de la géometrie analytique des coordonnées et introduit les n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Grassmann a quant à lui l'idée développer une "analyse géometrique", capable de calculer sur des grandeurs orientées de façon intrinséque (c'est-à-dire indépendante du choix des coordonnées). Il donne la définition de l'indépendance linéaire d'un système de vecteurs et celle de la dimension d'un sous espace vectoriel. Enfin c'est le point de vue des matrices et des coordonnées qui prédominera, par rapport à un point de vue plus intrinsèque des espaces vectoriels.

Ce document proposé aux étudiants des classes de première année mathématiques, il se compose de cinq chapitres, commençant par les espaces vectoriels, puis les applications linéaires, les matrices, les déterminants, et à la fin les systèmes linéaires, chaque chapitre contient des cours détaillés, ainsi que des exercices se trouvent à la fin du chapitre avec des solutions.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel

Dans ce chapitre, $\mathbb{k}$ désigne un corps. Dans la plupart des exemples, ce sera le corps $\mathbb{R}$

Définition 1.1 *un* $\mathbb{k}$***-espace vectoriel*** *est un ensemble non vide* E *muni :*

• *d'une loi des compositions interne, c'est-à-dire d'une application de* $E \times E$ *dans* E

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

• *d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de* $\mathbb{k} \times E$ *dans* E

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda.u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u$ *(pour tous* $u, v \in E$*)*

2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(pour tous* $u, v, w \in E$*)*

*3. il existe un **élément neutre*** $0_E \in E$ *tel que* $u + 0_E = u$ *(pour tout* $u \in E$*)*

4. tout $u \in E$ *admet un **symétrique*** u' *tel que* $u + u' = 0_E$*. Cet élément* u'*est noté* $-u$*.*

5. $1.u = u$ *(pour tout* $u \in E$*)*

6. $\lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$ *(pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{k}, u \in E$*)*

7. $\lambda.(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *(pour tous* $\lambda \in \mathbb{k}, u, v \in E$*)*

8. $(\lambda + \mu).u = \lambda u + \mu u$ *(pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{k}, u \in E$*)*

Nous reviendrons en détail sur chacune de ces propriétés juste après des exemples

· On appelle les éléments de E des **vecteurs**. Au lieu de $\mathbb{k}$-espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.

· Les éléments de $\mathbb{k}$ seront appelés des **scalaires**.

· **L'élément neutre** 0_E s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de $\mathbb{k}$.

Exemple 1.1 *(Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$)*
Posons $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x et y éléments de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

· Définition de la loi interne. Si (x, y) et (x', y') sont des éléments de $\mathbb{R}^2$ alors :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

· Définition de la loi externe. Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.

1.1.1 Règles de calcul

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. Alors on a :*
1. $0.u = 0_E$
2. $\lambda.0_E = 0_E$
3. $(-1).u = -u$
4. $\lambda.u = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $u = 0_E$

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.2 *(d'un sous-espace vectoriel)Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un* ***sous espace vectoriel*** *si :*
· $0_E \in F$,· $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
· $\lambda.u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ et tout $u \in F$.

Exemple 1.2 *(Exemples immédiats).*
1. L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x + y = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :
(a) $(0, 0) \in F$,
(b) si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent à F, alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$ donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$ et ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient à F,
(c) si $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$ d'où $\lambda u \in F$.

2. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Preuve : la fonction nulle est continue; la somme de deux fonctions continues est continue; la multiplication d'une fonction continue par un scalaire est une fonction continue.
3. L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Voici des sous-ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels

Exemple 1.3 *1. L'ensembles $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x + y = 2\}$,*
$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 + y^2 = 2\}$ n'est pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_1 et F_2 , en général les cercles dans le plan ou l'espace ne sont pas des sous espaces vectoriels.
2. L'ensemble $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet les vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ appartiennent à F_2, mais le vecteur $u + v = (1, 1) \notin F_3$.
3. L'ensemble $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur $u = (1, 1)$ appartient à F_3 mais, pour $\lambda = -1$, le vecteur $-u = (-1, -1)$ n'appartient pas à F_4.

Théorème 1.1 *Soient, E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{k}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

1.2.1 Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 1.2 *(Intersection de deux sous-espaces vectoriels)*
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
• $0_E \in F, 0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E ; donc $0_E \in F \cap G$.
• Soient u et v deux vecteurs de $F \cap G$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F \Longrightarrow u + v \in F$. De même $u, v \in G \Longrightarrow u + v \in G$.
Donc $u + v \in F \cap G$.
• Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F \Longrightarrow \lambda u \in F$. De même $u \in G$ implique $\lambda u \in G$. Donc $\lambda u \in F \cap G$.
Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Exemple 1.4 *Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + 3y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}.$$

Est-ce que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
L'ensemble D est L'intersection de F et G, les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y + z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\} \end{aligned}$$

Ce sont deux plans passant par l'origine, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $D = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, est une droite vectorielle

Remarque 1.1 *La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y)/x = 0\}$ et $G = \{(x, y)/y = 0\}$. Alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, mais n'est pas dans $F \cup G$.*

1.3 Combinaisons linéaires

Définition 1.3 *Soit $n \geq 1$ un entier, soient $v_1, v_2, ..., v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme*

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

*(où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont des éléments de $\Bbbk$) est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.*

Remarque 1.2 *Si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est **colinéaire** à v_1.*

Exemple 1.5 *1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(3, 3, 1)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ car on a l'égalité*

$$(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1).$$

2. soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$$

Alors la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 puisque l'on a l'égalité

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0.$$

Exemple 1.6 *Soient $u = (1, 2, -1)$, et $v = (6, 4, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $w = (9, 2, 7)$ est combinaison linéaire de u et v.*
On cherche donc λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$:

$$\begin{aligned}(9, 2, 7) &= \lambda\,(1, 2, -1) + \mu\,(6, 4, 2) \\ &= (\lambda, 2\lambda, -\lambda) + (6\mu, 4\mu, 2\mu) \\ &= (\lambda + 6\mu, 2\lambda + 4\mu, -\lambda + 2\mu)\end{aligned}$$

Une solution de ce système est $(\lambda = -3, \mu = -2)$, ce qui implique que w est combinaison linéaire de u et v.

On vérifie que l'on a bien

$$(9, 2, 7) = -3\,(1, 2, -1) + 2\,(6, 4, 2)\,.$$

1.3.1 Sous-espace engendré

Théorème 1.2 *(théorème de structure de l'ensemble des combinaisons linéaires)*
Soit $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\Bbbk$-espace vectoriel E. Alors :
· L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, ..., v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
· C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, ..., v_n$.

Preuve. 1. On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, ..., v_n\}$.
(a) $0_E \in F$ car F contient la combinaison linéaire particulière $0v_1 + \ldots + 0v_n$.
(b) Si $u, v \in F$ alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \Bbbk$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ et $\mu_1, ..., \mu_n \in \Bbbk$ tels que $v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$. On en déduit que $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$ appartient bien à F.
(c) De même, $\lambda u = \lambda v_1 + \ldots + \lambda v_n \in F$.
Conclusion : F est un sous-espace vectoriel.
2. Si G est un sous-espace vectoriel contenant $\{v_1, ..., v_n\}$, alors il est stable par combinaison linéaire, il contient donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, ..., v_n\}$. Par conséquent F est inclus dans G : F est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $\{v_1, ..., v_n\}$. ■

Notation 1.3 *Ce sous-espace vectoriel est appelé* ***sous-espace engendré par*** *$v_1, ..., v_n$ et est noté $Vect(v_1, ..., v_n)$.*

On a donc

$$u \in Vect(v_1, ..., v_n) \Longleftrightarrow \text{il existe } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \Bbbk \text{ tels que } u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n.$$

Exemple 1.7 *Soient* $u = (1,1,1)$ *et* $v = (1,2,3)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*. Déterminons* $P = Vect(u,v)$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \quad &\in \quad Vect(u,v) \Longleftrightarrow (x,y,z) = \lambda u + \mu v \text{ pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = \lambda\,(1,1,1) + \mu\,(1,2,3) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien une équation paramétrique du plan P *passant par l'origine et contenant les vecteurs* u *et* v*. On sait en trouver une équation cartésienne :* $(x - 2y + z = 0)$.

1.4 Famille libre

Définition 1.4 *Une famille* $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *de* E *est une* ***famille libre*** *ou* ***linéairement indépendante*** *si tout combinaison linéaire nulle*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad ... \ \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est ***liée*** *ou* ***linéairement dépendante****. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une* ***relation de dépendance linéaire*** *entre les* v_j.

Exemple 1.8 *Dans le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*, considérons la famille*

$$\{(1,2,3)\,,\ (4,5,6)\,,\ (2,1,0)\}\,.$$

On souhaite déterminer si elle est libre ou liée. On cherche des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *tels que*

$$\lambda_1\,(1,2,3) + \lambda_2\,(4,5,6) + \lambda_3\,(2,1,0) = (0,0,0)$$

Ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On voit que ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions et en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ *on obtient* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = -1$*, ce qui fait que*

$$2\,(1,2,3) - (4,5,6) + (2,1,0) = (0,0,0)$$

La famille

$$\{(1,2,3)\,,\ (4,5,6)\,,\ (2,1,0)\}$$

est donc une famille liée.

Exemple 1.9 *Soient* $v_1 = (1,1,1)\,, v_2 = (2,-1,0)\,, v_3 = (2,1,1)$*.est-ce que la famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est libre ou liée? Résolvons le système linéaire correspondant à l'équation* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ *:*

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \ \lambda_2 + \ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \qquad\quad + \ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve comme seule solution $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$*. La famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est donc une famille libre.*

1.5 Famille génératrice

Définition 1.5 *Soient* $\{v_1, ..., v_p\}$ *des vecteurs de* E*. La famille* $\{v_1, ..., v_p\}$ *est une* ***famille génératrice*** *de l'espace vectoriel* E *si tout vecteur de* E *est une combinaison linéaire des vecteurs* $v_1, ..., v_p$*. Ce qui peut s'écrit aussi :*

$$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \Bbbk \qquad v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, ..., v_p\}$ ***engendre*** *l'espace vectoriel* E*.*

Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $\{v_1, ..., v_p\}$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = Vect(v_1, ..., v_p)$.

Exemple 1.10 *Considérons par exemple les vecteurs* $v_1 = (1,0,0)\,, v_2 = (0,1,0)$ *et* $v_3 = (0,0,1)$ *de* $E = \mathbb{R}^3$*. La famille* $\{v_1, ..., v_p\}$ *est génératrice car tout vecteur* $v = (x,y,z)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *peut s'écrire*

$$(x,y,z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1)$$

Les coefficients sont ici $\lambda_1 = x,\ \lambda_2 = y,\ \lambda_3 = z$*.*

1.6 Base

Définition 1.6 *(Base d'un espace vectoriel)*
*Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. Une famille $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de vecteurs de E est une **base** de E si B est une famille libre **et** génératrice.*

Théorème 1.4 *Soit $B = (v_1, ..., v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de B. Autrement dit, il **existe** des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$ **uniques** tels que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

Remarque 1.3 *1. $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ s'appellent les **coordonnées** du vecteur v dans la base B.*
*2. il faut observer que pour une base $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ on introduit un **ordre** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permute les vecteurs on obtiendrait toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées.*

Exemple 1.11 *1. Soient les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Alors (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.*
2. Soient les vecteurs $v_1 = (3, 1)$ et $v_2 = (1, 2)$. Alors (v_1, v_2) forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.12 *Les vecteurs de $\mathbb{k}^n$:*

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)\,, \quad e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)\,, \quad e_n = (0, ..., 0, 1)$$

*forment une base de $\mathbb{k}^n$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{k}^n$.*

Exemple 1.13 *La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $B = (1, X, X^2, ..., X^n)$.*
Attention, il ya $n + 1$ vecteurs!

1.6.1 Théorème de la base incomplète

Théorème 1.5 *Soit $\Im$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors il existe une famille $\mathcal{F}$ de $\Im$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit une base de E.*

Exercise 1.6 *Déterminer une base du sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbb{R}^3$ d'équation:*
$x + 3y - 2z = 0$. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.

1.7 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.7 *Soit B une base d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E, la dimension de E noté $\dim E$ est $|B|$ (le cardinal de B)*
Si $|B| \prec \infty$, on dit que E est de dimension finie, l'autre cas on dit que E est de dimension infini

Convontion. On convient d'attribuer à l'espace vectoriel $\{0\}$ la dimension 0.

Les espaces vectoriels étudiés sont tous de dimension finie sauf exeption.

Exemple 1.14 *1. La base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *est* $\{(1,0),(0,1)\}$. *La dimension de* $\mathbb{R}^2$ *est donc* 2.
2. Les vecteurs $\{(2,1),(1,1)\}$ *forment aussi une base de* $\mathbb{R}^2$, *et illustrent qu'une autre base contient le même nombre d'éléments.*
3.Plus généralement, $\mathbb{k}^n$ *est de dimension* n, *car par exemple sa base canonique* $(e_1,...,e_n)$ *contient* n *éléments.*
4. $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ *car une base de* $\mathbb{R}_n[X]$ *est* $(1, X, X^2, ..., X^n)$, *qui contient* $n+1$ *élément.*

Théorème 1.7 *Soit* E *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel de dimension finie.*
1. Alors tout sous-espace vectoriel F *de* E *est de dimension finie,*
2. $\dim F \leq \dim E$,
3. $E = F \Longleftrightarrow \dim E = \dim F$.

1.7.1 Somme de sous espaces vectoriels

Définition 1.8 *Soient* F *et* G *deux sous espaces vectoriels d'un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel* E, *l'ensemble de tous les éléments* $u+v$, *où* $u \in F$ *et* $v \in G$ *est appelé somme des sous espaces vectoriels* F *et* G, *et on la note par* $F+G$, *donc*
$F+G = \{u+v/\ u \in F \text{ et } v \in G\}$.
En général, pour $n \geq 2$,
Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ *une famille des sous espaces vectoriels de* E *alors,*
$E_1 + E_2 + ..., +E_n = \{x_1 + x_2 + ... + x_n, \text{ avec } (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n\}$.

Proposition 1.3 *Soient* F *et* G *deux sous espaces vectoriels d'un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel* E,
1. $F+G$ *est un sous espace vectoriel de* E,
2. $F+G$ *est le plus petit sous espace vectoriel contenant simultanément* F *et* G.

Exemple 1.15 *On considère dans* $\mathbb{R}^3$ *les trois sous-espaces vectoriels* F, G, H *définis respectivement par :*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 0 \text{ et } y = z\}$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y = 0\}$$

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = 0\}$$

- Determiner $F+G$, $F+H$, $G+H$.
$\triangleright$ *Les trois sous-espaces* $F+G$, $F+H$ *et* $G+H$ *sont tous égaux à* $\mathbb{R}^3$, *c à d*
$F+G = F+H = G+H = \mathbb{R}^3$,
En effet, si (a,b,c) *est un élément de* $\mathbb{R}^3$, *on peut écrire* $(a,b,c) = (0,b,b) + (a,0,c-b)$, *donc est la*

somme du vecteur $(0, b, b)$ *de* F *et du vecteur* $(a, 0, c-b)$ *de* G.
De même $(a, b, c) = (0, c, c) + (a, b-c, 0)$ *, est la somme du vecteur* $(0, c, c)$ *de* F *et du vecteur* $(a, b-c, 0)$ *de* H.
Enfin $(a, b, c) = (a, 0, c) + (0, b, 0)$ *, est la somme du vecteur* $(a, 0, c)$ *de* G *et du vecteur* $(0, b, 0)$ *de* H.

1.7.2 Somme directe

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1.9 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *On dit que* F *et* G *sont supplémentaires si et seulement si ils vérifient :*
• $F \cap G = \{0_E\}$,
• $F + G = E$. *c à d:* $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists!(x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$ *(c'est-à-dire,* ***tout*** *vecteur de* E *se décompose de manière* ***unique*** *comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G.*))*
On note alors $F \oplus G = E$.

on dit que F et G sont en somme direct.

Théorème 1.8 ***Caractérisation de la supplémentarité en termes de bases***
Soient E *un espace vectoriel de dimension finie* n *et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E *munis d'une base,* $e_1, ..., e_p$, *pour* F *et d'une base,* $f_1, ..., f_q$, *pour* G. *On a équivalence entre :*
1 F *et* G *sont supplémentaires dans* E : $E = F \oplus G$.
2 $B = (e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q)$ *est une base de* E.

Corollaire 1.1 ***Caractérisation des supplémentaires***
Soient E *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel de dimension finie,* F *et* G *des sous-espaces vectoriels de* E. *On a équivalence entre :*
1 F *et* G *sont supplémentaires dans* E.
2 $F \cap G = \{0\}$ *et* $\dim F + \dim G = \dim E$.
3 $F + G = E$ *et* $\dim F + \dim G = \dim E$. *(la preuve voir corollaire 1.2)*

Exemple 1.16 *Soient* $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$ *et* $G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}\}$.
Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.
La première façon de le voir est que l'on est clairement $F \cap G = \{(0, 0)\}$ *et que, comme* $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, *alors* $F + G = \mathbb{R}^2$.

Exemple 1.17 *Montrer que l'ensemble des polynomes constants et les polynomes divisibles par* $(x-1)$ *sont supplementaires dans* $\mathbb{R}[x]$.
$\triangleright$ *c-à-d on montre que* $\mathbb{R}[x] = A \oplus (x-1)\mathbb{R}[x]$, *où* A *est l'esembles des polynomes constantes,*

Alors il doit montrer les deux propriétés:

$$\begin{cases} \mathbb{R}[x] = A + (x-1)\mathbb{R}[x] \quad .....(1) \\ A \cap (x-1)\mathbb{R}[x] = \{0\} \quad ....(2) \end{cases}$$

(1): On a $\forall P \in \mathbb{R}[x]$, $P = (x-1)Q + R$, *avec* $\deg R \prec 1$
d'où $P = A + (x-1)\mathbb{R}[x]$.
(2): Soit $A = C^{te}$, *donc* $C^{te} \cap (x-1)\mathbb{R}[x] = \{0\}$, *car le polynome* $(x-1)\mathbb{R}[x]$ *soit constant s'il s'annule au* 0, *donc* $C^{te} = 0$
Alors $\mathbb{R}[x]$ *est un somme direst de l'ensemble des polynomes constants et les polynomes divisibles par* $(x-1)$.

Théorème 1.9 *(Formule de Grassmann, théorème des quatre dimensions) Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *des sous-espaces vectoriels de* E. *Alors :*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire 1.2 *Si* $E = F \oplus G$, *alors* $\dim E = \dim F + \dim G$.

Preuve. Soient $F^{'}$ et $G^{'}$ les supplémentaires de $F \cap G$ dans F et G respectivement, d'où :

$$\begin{aligned} F &= F^{'} \oplus F \cap G \\ G &= G^{'} \oplus F \cap G \end{aligned}$$

Alors, $F + G = F^{'} + G^{'} \oplus F \cap G$, et comme $F^{'} \cap G^{'} = \{0\}$ alors, on a la somme directe $F \oplus G = F^{'} \oplus G^{'} \oplus F \cap G$ par suite, $\dim(F+G) = \dim F^{'} + \dim G^{'} + \dim(F \cap G)$
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \dim F^{'} &= \dim F - \dim F \cap G \\ \text{et} \quad \dim G^{'} &= \dim G - \dim F \cap G \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(F+G) = \dim F - \dim F \cap G + \dim G - \dim F \cap G + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.
■

Exemple 1.18 *Dans un espace vectoriel* E *de dimension* 6, *on considère deux sous-espaces* F *et* G *avec* $\dim F = 3$ *et* $\dim G = 4$.
Que peut-on dire de $F \cap G$*? de* $F + G$*? Peut-on avoir* $F \oplus G = E$*?*
· $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel inclus dans* F, *donc* $\dim(F \cap G) \leq \dim F = 3$.
Donc les dimensions possibles pour $F \cap G$ *sont pour l'instant* $0, 1, 2, 3$
· $F + G$ *est un sous-espace vectoriel contenant* G *et inclus dans* E, *donc* $4 = \dim G \leq \dim(F+G) \leq \dim E = 6$.

Donc les dimensions possibles pour $F+G$ sont $4,5,6$.

· *Le théorème 1.9 des quatre dimensions nous donne la relation :* $\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G-\dim(F+G)=3+4-\dim(F+G)=7-\dim(F\cap G)$.

Comme $F+G$ est de dimension $4,5$ ou 6, alors la dimension de $F\cap G$ est $3,2$ ou 4.

· ***Conclusion :*** *les dimensions possibles pour $F+G$ sont $4,5$ ou 6; les dimensions correspondantes pour $F\cap G$ sont alors $3,2$ ou 1.*

Dans tous les cas, $F\cap G\neq\{0\}$ et en particulier F et G ne sont jamais en somme directe dans E.

1.8 Exercices

Exercice 1.1 *Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.*

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $A=\{f\in E, 2f(0)=f(1)\}$.
2. $B=\{f\in E, f(1)=f(0)+1\}$.
3. $C=\{f\in E, f>0\}$.
4. $D=\{f\in E, f(x)\equiv f(1-x)\}$.
5. $F=\{f\in E, f$ *polynomiale de degré* $4\}$.
6. $G=\{f\in E,\ f$ *polynomiale de degré* $\leq 4\}$.

Solution 1.1 *1. A est un sous-espace vectoriel de E. D'une part, il contient la fonction nulle. D'autre part, soient f, g deux éléments de A, et α, β deux scalaires.*

Soit $h=\alpha f+\beta g$.

Alors : $2h(0)=2(\alpha f+\beta g)(0)=2\alpha f(0)+2\beta g(0)=\alpha f(1)+\beta g(1)=h(1)$.

Ainsi h appartient à A, qui est donc stable par combinaisons linéaires.

Remarque : le résultat est évident, et il est plus élégant de dire que A est le noyau de la forme linéaire ϕ définie sur E par : $\forall f\in E$, $\phi(f)=2f(0)-f(1)$.

2. B n'est pas un sous-espace vectoriel de E car il ne contient pas la fonction nulle.

3. La fonction constante f définie par $f(x)\equiv 1$ est dans C, mais $-f$ n'appartient pas à C. Donc C n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E

4. La fonction nulle est dans D. Soient f, g dans D, et α, β dans $\mathbb{R}$. Soit $h=\alpha f+\beta g$. Pour tout x de $[0,1]$: $h(1-x)=\alpha f(1-x)+\beta g(1-x)=\alpha f(x)+\beta g(x)=h(x)$.

Ainsi h est encore élément de D qui est donc un sous-espace vectoriel de E.

5. La fonction nulle n'est pas polynome de degré 4. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

6. La réponse est oui. On peut dire par exemple que G est le sous-espace vectoriel de E engendré par les applications $x\longmapsto 1$, $x\longmapsto x$, $x\longmapsto x^2$, $x\longmapsto x^3$ et $x\longmapsto x^4$.

Exercice 1.2 *Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que l'ensemble*

$$E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x+3y-2z-5t=0 \text{ et } x+2y+z-t=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel.
Donner la dimension et une base.

Solution 1.2 *Soit* $u = (x, y, z, t)$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 2z + 5t \\ x + 2y = -z + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z - 7t \\ y = 3z + 4t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(x, y, z, t) = (-7z - 7t, 3z + 4t, z, t) = z(-7, 3, 1, 0) + t(-7, 4, 0, 1)$, *avec* $(z, t) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi E *est l'ensemble des combinaisons linéaires de* $a = (-7, 3, 1, 0)$, $b = (-7, 4, 0, 1)$
La famille $\{a,\ b\}$ *est libre. Elle constitue donc une base de* E, *et* $\dim E = 2$.

Exercice 1.3 *1. Montrer que la famille* $a = (9, -3, 7)$, $b = (1, 8, 8)$, $c = (5, -5, 1)$ *est liée.*
2. Soient a, b, c *trois réels quelconques.*
Montrer que $f_a : x \to sin(x + a)$, $f_b : x \to sin(x + b)$ *et* $f_c : x \to sin(x + c)$ *sont liées.*

Solution 1.3 *1. On doit trouver* $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ *tel que* $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$

$$\alpha a+\beta b+\gamma c = 0 \Leftrightarrow \alpha(9, -3, 7)+\beta(1, 8, 8)+\gamma(5, -5, 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 3\alpha - 8\beta + 5\gamma = 0 \\ 7\alpha + 8\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 6\alpha + 9\beta = 0 \\ 26\alpha + 39\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Ce système admet des solutions non nulles parmi les quelles $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -5$. *On a donc* $3a - 2b - 5c = 0$ *: la famille* $\{a, b, c\}$ *est liée.*
2. Pour tout x *de* $\mathbb{R}$, $f_a(x) = \cos a \sin x + \sin a \cos x$. *Ainsi l'application* f_a *est combinaison linéaire de* $x \to \sin x$ *et de* $x \to \cos x$.*De la même manière,* f_b *et* f_c *sont dans le plan engendré par* $x \to \sin x$ *et de* $x \to \cos x$. *Les trois applications*f_a, f_b, f_c *étant dans un même plan, elles forment une famille liée.*

Exercice 1.4 *Peut-on déterminer* λ *et* μ *dans* $\mathbb{R}$ *pour que le vecteur* $u = (-2, \lambda, \mu, 3)$ *appartienne au sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*engendré par* $a = (1, -1, 1, 2)$ *et* $b = (-1, 2, 3, 1)$ *?*
Même question avec $u = (\lambda, 1, \mu, 1)$, $a = (1, 2, 3, 4)$, *et* $b = (1, -2, 3, -4)$.

Solution 1.4 *On résout* $u = xa+yb$, *d'inconnues* x, y, *de paramètres* $\lambda, \mu.u = xa+yb \Leftrightarrow (-2, \lambda, \mu, 3) = x(1, -1, 1, 2) + y(-1, 2, 3, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ -x + 2y = \lambda \\ x + 3y = \mu \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 13, y = 73, \lambda = 133, \mu = 223$$

Le vecteur u *est donc dans le plan engendré par* a, b *si et seulement si* $\lambda = 133$*et* $\mu = 223$.
Dans le cas où $u = (\lambda, 1, \mu, 1)$, $a = (1, 2, 3, 4)$, *et* $b = (1, -2, 3, -4)$, *la réponse est négative.*

En effet a et b sont dans l'hyperplan $H = \{w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ t = 2y\}$.
Il en est donc de même de leurs combinaisons linéaires. Or $u = (\lambda, 1, \mu, 1)$ *n'est jamais dans* H.
Il ne peut donc être dans le plan engendré par $\{a, b\}$.

Exercice 1.5 *Dans* $\mathbb{R}^4$*, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par :*$a = (1, 2, 2, 1)$, $b = (4, 3, 10, 5)$, $c = (-1, -3, 4, 0)$, $d = (0, 4, -3, -1)$.

Solution 1.5 *Le système* $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$ *équivaut à :*

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta - 3\gamma + 4\delta = 0 \\ 2\alpha + 10\beta + 4\gamma - 3\delta = 0 \\ \alpha + 5\beta - \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\beta + \gamma \\ 5\beta + \gamma - 4\delta = 0 \\ 2\beta + 6\gamma - 3\delta = 0 \\ \beta + \gamma - \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\beta + \gamma \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \delta = \beta + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -11\gamma \\ \beta = 3\gamma \\ \delta = 4\gamma \end{cases}$$

On constate que la famille $\{a, b, c, d\}$ *est liée (donc de rang inférieur ou égal à* 3.*)Avec* $\gamma = 0$*, c'est-à-dire si on résout* $\alpha a + \beta b + \delta d = 0$ *, on trouve* $\alpha = \beta = \delta = 0$.
La famille $\{a, b, d\}$ *est donc libre : c'est une base de* $Vect(a, b, c, d)$
(qui est de dimension 3*).*

Exercice 1.6 *On définit les trois sous-espaces suivants de* $E = \mathbb{k}_3[X]$ *:*
$F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$
$G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
$H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$
– *Montrer que* $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
– *Montrer que* $E = F \oplus G \oplus H$.

Solution 1.6 – *Si* P *appartient à* $F \cap G$*, il s'annule en les quatre points distincts* 0, 1, 2, 3 *alors qu'il est de degré inférieur ou égal à* 3 *: il est donc nul. Ainsi* F *et* G *sont en somme directe.*
Si on note $K = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$*, on a bien sûr* $F \subset K$ *et* $G \subset K$.
On en déduit $F \oplus G \subset K$.
F *est l'ensemble des polynômes* $P = \alpha X(X-1)(X-2)$*, avec* $\alpha \in K$ *:* $\dim F = 1$.
G *est l'ensemble des polynômes* $P = \beta(X-1)(X-2)(X-3)$*, avec* $\beta \in K$ *:* $\dim G = 1$.
K *est l'ensemble des polynômes* $P = (aX + b)(X-1)(X-2)$*, avec* $(a, b) \in \mathbb{k}^2$ *:* $\dim K = 2$.
Donc $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = \dim K$*, avec* $F \oplus G \subset K$ *:*
On en déduit $F \oplus G = K$.
– H *est l'ensemble des polynômes pairs* $P = a + bX^2$*, avec* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *: c'est un plan.*
Si P *est dans* $(F \oplus G) \cap H$*, alors* $(P(1) = a + b = 0,\ P(2) = a + 4b = 0$ *donc* $a = b = 0$.
Ainsi H *et* $F \oplus G$ *sont en somme directe.*
Or
$\dim(F \oplus G \oplus H) = \dim(F \oplus G) + \dim H$

$= 2 + 2 = 4 = \dim E.$

Ainsi $F \oplus G \oplus H = E.$

Chapitre 2

Applications linéaires

Définition 2.1 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une* ***application linéaire*** *si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*
1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, pour tous $u, v \in E$,
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, pour tout $u, \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

Autrement dit : une application est linéaire si elle « préserve » les deux lois d'un espace vectoriel.

Notation 2.1 *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.*

Exemple 2.1 *L'application f définie par*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (-2x, y + 3z) \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et soit λ un réel.

$$\begin{array}{rcl} f(u+v) & = & f(x+x', y+y', z+z') \\ & = & (-2(x+x'), y+y'+3(z+z')) \\ & = & (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') \\ & = & f(u) + f(v) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u) & = & f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ & = & (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) \\ & = & \lambda.(-2x, y+3z) \\ & = & \lambda.f(u) \end{array}$$

Exemple 2.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie par* $f(x) = x^2$. *On a* $f(1) = 1$ *et* $f(2) = 4$. *Donc* $f(2) \neq 2.f(1)$.*Ce qui fait que l'on n'a pas l'égalité* $f(\lambda x) = \lambda.f(x)$ *pour un certain choix de* λ, x. *Donc* f *n'est pas linéaire.*

Proposition 2.1 *(caractérisation d'une application linéaire)*
Soient E *et* F *deux* $\Bbbk$*-espaces vectoriels et* f *une application de* E *dans* F. *L'application* f *est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs* u *et* v *de* E, *et pour tous scalaires* λ *et* μ *de* $\Bbbk$,

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

2.1 Noyau d'une application linéaire

Définition 2.2 *(Définition du noyau)*
Soient E *et* F *deux* $\Bbbk$*-espaces vectoriels et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Le* ***noyau*** *de* f, *noté* $\ker(f)$, *est l'ensemble des éléments de* E *dont l'image est* 0_F *:*

$$\ker(f) = \{x \in E;\ f(x) = 0_F\}$$

Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\ker(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Proposition 2.2 *Soient* E *et* F *deux* $\Bbbk$*-espaces vectoriels et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Le noyau de* f *est un sous-espace vectoriel de* E.

Preuve. $\ker(f)$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$. Soient $x_1, x_2 \in \ker(f)$ et λ et $\mu \in \Bbbk$.
Montrons que $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de $\ker(f)$.
On a, en utilisant la linéarité de f et le fait que x_1 et x_2 sont des éléments de $\ker(f)$: $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = \lambda 0_F + \mu 0_F = 0_F$. ■

Théorème 2.2 *(Caractérisation des applications linéaires injectives)*
Soient E *et* F *deux* $\Bbbk$*-espaces vectoriels et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Alors :*

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$$

Preuve. • Supposons que f soit injective et montrons que $\ker(f) = \{0_E\}$.
Soit x un élément de $\ker(f)$. On a $f(x) = 0_F$. Or, comme f est linéaire, on a aussi$f(0_E) = 0_F$. De l'égalité $f(x) = f(0_E)$, on déduit $x = 0_E$ car f est injective. Donc $\ker(f) = \{0_E\}$.
• Réciproquement, supposons maintenant que $\ker(f) = \{0_E\}$.
Soient x et y deux éléments de E telsque $f(x) = f(y)$. On a donc $f(x) - f(y) = 0_F$. Comme f est lineaire, on en deduit $f(x - y) = 0_F$ c'est à dire $x - y$ est un élément de $\ker f$ donc $x - y = 0_E$ alors $x = y$. ■

Exemple 2.3 *Repronons l'exemple de l'application linéaire f définie par*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \quad \longrightarrow \quad & (-2x, y+3z) \end{aligned}$$

· *Calculons le noyau* $\ker(f)$

$$\begin{aligned} (x,y,z) \quad \in \quad & \ker(f) \Longleftrightarrow f(x,y,z) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad (-2x, y+3z) = (0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,-3z,z), \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $ker(f) = \{(0,-3z,z)/\ z \in \mathbb{R}\}$. *Autrement dit,* $Ker(f) = Vect\{(0,-3z,z)\}$ *: c'est une droite vectorielle.*

Remarque 2.1 *Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels.*
· *Une applications linaires de E dans F est aussi appelée* ***morphisme*** *ou* ***homomorphisme*** *d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.*
· *Une application linéaire de E dans E est appelée* ***endomorphisme*** *de E. L'ensemble des* ***endomorphismes*** *de E est noté $\mathcal{L}(E)$.*
· *Une application linéaire* ***bijective*** *de E sur F est appelée* ***isomorphisme*** *d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits* ***isomorphes****.*
· *Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé* ***automorphisme*** *de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.*

2.2 Image d'une application linéaire

Commençons par des rappels. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. L'ensemble des images par f des éléments de A, appelé **image directe** de A par f, est noté $f(A)$. C'est un sous-ensemble de F. On a par définition :

$$f(A) = \{f(x)/\ x \in A\} \subset F$$

L'ensemble $f(E)$ s'appelle l'image de l'application linéaire f et est noté $\operatorname{Im} f$.

Remarque 2.2 *On a par définition de l'image directe $f(E)$:*

$$f \text{ est surjective si et seulement si } \operatorname{Im} f = F.$$

Proposition 2.3 *(Structure de l'image d'un sous-espace vectoriel).*
1. Si $E^{'}$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E^{'})$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. En particulier, $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Preuve. Comme $0_E \in E^{'}$ alors $0_F = f(0_E) \in f(E^{'})$.
Ensuite on montre que pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de $f(E^{'})$ et pour tous scalaires λ et μ, l'élément $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à $f(E^{'})$. En effet :
$y_1 \in f(E^{'}) \Longleftrightarrow \exists x_1 \in E^{'},\ f(x_1) = y_1$
$y_2 \in f(E^{'}) \Longleftrightarrow \exists x_2 \in E^{'}, f(x_2) = y_2$.
Comme f est linéaire, on a
$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2)$.
Or $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de $E^{'}$, car $E^{'}$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est bien un élément de $f(E^{'})$. $\blacksquare$

Exemple 2.4 *Dans l'exemple précédent:*
$\cdot$ *Calculonsl'image de f. Fixons $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.*

$$\begin{aligned} (x', y') &= f(x, y, z) \Longleftrightarrow (-2x, y + 3z) = (x', y') \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x = x' \\ y + 3z = y' \end{cases} \end{aligned}$$

On peut prendre par exemple $x = \frac{-x'}{2}$, $y = y'$, $z = 0$.
Conclusion : pour n'importe quel $(x^{'}, y^{'}) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(\frac{-x'}{2}, y', 0) = (x', y')$. Donc $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$*, et f est surjective.*

2.2.1 Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On rappelle que l'on note $f(E)$ par $\operatorname{Im}(f)$, c'est-à-dire $\operatorname{Im}(f) = \{f(x)/\ x \in E\}$. $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Si E est de dimension finie, alors :
$\cdot$ $\operatorname{Im}(f) = f(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie.
$\cdot$ Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, alors $\operatorname{Im}(f) = Vect(f(e_1), ..., f(e_n))$.
La dimension de cet espace vectoriel $\operatorname{Im}(f)$ est appelée **rang de** f :

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im}(f) = \dim Vect(f(e_1), ..., f(e_n))$$

Exemple 2.5 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (3x-4y+2z, 2x-3y-z)$. Quel est le rang de f ?*

Si on note $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$, *alors* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
Il s'agit de trouver le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ *:*

$$\begin{aligned} v_1 &= f(e_1) = f(1,0,0) = (3,2)\,, \\ v_2 &= f(e_2) = f(0,1,0) = (-4,-3)\,, \\ v_3 &= f(e_3) = f(0,0,1) = (2,-1)\,, \end{aligned}$$

Commençons par estimer le rang sans faire de calculs.
· *Nous avons une famille de* 3 *vecteurs donc* $rg(f) \leq 3$.
· *Mais en fait les vecteurs* v_1, v_2, v_3 *appartienent dans un espace de dimension* 2 *donc* $rg(f) \leq 2$.
· f *n'est pas l'application linéaire nulle (autrement dit* v_1, v_2, v_3 *ne sont pas tous nuls) donc* $rg(f) \geq 1$.
Donc le rang de f *vaut* 1 *ou* 2. *Il est facile de voire que* v_1 *et* v_2 *sont linéairement indépendants, donc le rang est* 2 *:*

$$rg(f) = rg(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \dim Vect(v_1, v_2, v_3) = 2$$

2.2.2 Théorème du rang

Théorème 2.3 *(Théorème des rang)*
Soit $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire entre deux* $\mathbb{k}$*-espaces vectoriels,* E *étant de dimension finie. Alors*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

Autrement dit : $\dim E = \dim \ker f + rg(f)$.

2.3 Exercices

Exercice 2.1 *Soit* f *un endomorphisme de* E. *Montrer que* $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ *si et seulement si la restriction de* f *à* $\operatorname{Im} f$ *est un automorphisme de* $\operatorname{Im} f$.

Solution 2.1 *On suppose que* $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
Soit g *la restriction de* f *à* $\operatorname{Im} f$.*Il est clair que* $\operatorname{Im} f$ *est stable par* f *donc par* g. *Ainsi* g *est un endomorphisme de* $\operatorname{Im} f$.
Soit v *dans* $\operatorname{Im} f$. *Il existe* u *dans* E *tel que* $v = f(u)$, *mais il existe* $u^{'}$ *dans* $\ker f$ *et* $u^{''}$ *dans* $\operatorname{Im} f$ *tel que* $u = u^{'} + u^{''}$, *car* $E = \ker f + \operatorname{Im} f$.
On en déduit $v = f(u^{'} + u^{''}) = f(u^{'}) = g(u^{''})$, *ce qui prouve la surjectivité de* g.
Soit v *dans* $\ker g$. *Alors* v *est dans* $\operatorname{Im} f$ *et on a* $g(v) = 0$ *donc* $f(v) = 0$.
Ainsi v *est dans* $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, *ce qui prouve l'injectivité de* g.
L'application g *est donc un isomorphisme de* $\operatorname{Im} f$ *sur lui-même.*
Réciproquement supposons que la restriction g *de* f *à* $\operatorname{Im} f$ *est un automorphisme de* $\operatorname{Im} f$.

Soit u un vecteur de $\ker f \cap \operatorname{Im} f$.

On a $f(u) = 0$ *et* $u \in \operatorname{Im} f$. *Il en découle* $g(u) = 0$ *et donc* $u = 0$ *car* g *est injective.*

Soit u un vecteur de E, on a $f(u) \in \operatorname{Im} f$. *puisque g est un automorphisme de* $\operatorname{Im} f$, *il existe v dans* $\operatorname{Im} f$ *tel que* $f(u) = g(v)$.

On a ainsi $f(u) = f(v)$ *donc* $f(u - v) = 0$.

Le vecteur $w = u - v$ *est dans* $\ker f$., *on a* $u = w + v$, *avec w dans* $\ker f$ *et v dans* $\operatorname{Im} f$, *ce qui prouve* $E = \ker f + \operatorname{Im} f$. *Finalement, on a prouvé que* $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 2.2 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *par* $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - y - z)$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\ker f$, $\operatorname{Im} f$.

Solution 2.2 *1.* $\forall u\,(x, y, z),\ v\left(x', y', z'\right) \in \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R};$

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) &= f\left(\alpha (x, y, z) + \beta \left(x', y', z'\right)\right) \\
&= f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'\right) \\
&= \left(\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z', 2\left(\alpha x + \beta x'\right) - \left(\alpha y + \beta y'\right) - \left(\alpha z + \beta z'\right)\right) \\
&= \alpha (x + y + z, 2x - y - z) + \beta \left(x' + y' + z', 2x' - y' - z'\right) \\
&= \alpha f(u) + \beta f(v).
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2)

$$\begin{aligned}
\ker f &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = (0, 0)\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x + y + z, 2x - y - z) = (0, 0)\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x + y + z, 2x - y - z) = (0, 0)\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0,\ y = -z\right\} \\
&= \{(0, -z, z);\ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(0, -1, 1);\ z \in \mathbb{R}\} \\
\ker f &= Vect((0, -1, 1)).
\end{aligned}$$

Donc $\{(0, -1, 1)\}$ *est une base pour* $\ker f$, $\dim \ker f = 1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{(f(x, y, z));\ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x + y + z, 2x - y - z);\ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 2) + y(1, -1) + z(1, -1);\ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
\operatorname{Im} f &= Vect(u(1, 2),\ v(1, -1)).
\end{aligned}$$

les vecteurs u, v *sont ils libres?*

$$\lambda_1 (1,2) + \lambda_2 (1,-1) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

donc les vecteurs u, v *sont ils libres et* $\{u, v\}$ *est une base pour* $\operatorname{Im} f$, *donc* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Exercice 2.3 *Soit* $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire définie pour tout* $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, *non nul, tel que* $\ker f = Vect(a)$, *déterminer un vecteur qui convient.*

2. Soit $b = e_1 + e_2$ *et* $c = e_2 - e_3$.

a. Calculer $f(b)$, $f(c)$

b. En déduire que $\{b, c\}$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$. *On pourra utiliser une autre méthode.*

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\operatorname{Im} f$.

4. A-t-on $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ *?*

Solution 2.3 *1.*$u(x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x}{2} \\ y = x \end{cases}$$

Donc $u = (x, x, \frac{x}{2}) = \frac{x}{2}(2, 2, 1)$ *On pose alors* $a = (2, 2, 1)$ *et* $\ker f = Vect(a)$

2. a. $b = (1, 1, 0)$ *donc* $f(b) = (6\times1-4\times1-4\times0,\ 5\times1-3\times1-4\times0,\ 1-1) = (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0) = 2b$.

$c = (0, 1, -1) = e_2 - e_3$ *donc* $f(c) = (6\times0-4\times1-4\times(-1),\ 5\times0-3\times1-4\times(-1), 0-1) = (0, 1, -1) = c$

b. $b = \frac{1}{2}f(b) = f(\frac{b}{2}) \in \operatorname{Im} f$ *et* $c = f(c) \in \operatorname{Im} f$.

Comme b *et* c *ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de* $\operatorname{Im} f$. *D'autre part, d'après le théorème du rang* $\dim(\ker f + \dim \operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Donc $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, *une famille libre à deux éléments dans un espace vectoriel de dimension* 2 *est une base.*

3. $u = (x, y, z) \in Vect(f(e_1),\ f(e_2)) \Leftrightarrow \exists \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ u = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}, \alpha(6, 5, 1) + \beta(-4, -3, -1) = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} 6\alpha - 4\beta = x \\ 5\alpha - 3\beta = y \\ \alpha - \beta = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} 6\alpha - 4\beta = x \\ 2\beta = 6y - 5x \\ -2\beta = 6z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} 6\alpha - 4\beta = x \\ 2\beta = 6y - 5x \\ 0 = -6x + 6y + 6z \end{cases}$$

Donc une équation caractérisant $\operatorname{Im} f$ *est* $x - y - z = 0$.

4. $2 - 2 - 1 = -1$ *donc* $a \notin \operatorname{Im} f = Vect\{b, c\}$ $\{b, c\}$ *est libre donc* $\{a, b, c\}$ *est libre et à* 3 *vecteurs donc est une base de* $\mathbb{R}^3$ *donc* $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.4 *On considère l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$f(x, y) = (x - y, 3x + 3y)$$

1. Montrer que f *est une application linéaire.*

2. Montrer que f *est ni injective ni surjective.*

3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 2.5 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie pour tout vecteur* $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

1 Montrer que f *est une application linéaire.*

2. Donner une base de $\ker f$, *en déduire* $\dim \operatorname{Im} f$.

3. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 2.6 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie pour tout* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *par :*

$$f(x) = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

1. Montrer que f *est une application linéaire.*

2. Déterminer les dimensions de $\ker f$ *et de* $\operatorname{Im} f$.

Chapitre 3

Matrices

3.1 Matrices

Définition 3.1 • *Une **matrice** A est un tableau rectangulaire ou carré d'éléments de $\mathbb{k}$.*
• *Elle est dite de **taille** $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.*
• *Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A.*
• *Les coefficient situé à la i-ème ligne et le j'ème colonne est noté $a_{i,j}$.*

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Exemple 3.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple $a_{1,1} = 1$, $a_{2,3} = 7$.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{k})$.
*Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles**.*

Notation 3.1 *On dit une matrice de taille $n \times p$ ou bien matrice d'ordre $n \times p$.*

3.2 Operations sur les matrices

3.2.1 Addition des matrices

Définition 3.2 *(Somme de deux matrices)*
*Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. leur **somme** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par*

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

En d'autres terme, on somme coefficients par coefficients.
On note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Exemple 3.2

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Par contre si} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad A + B' \ \text{n'est pas définie.}$$

3.2.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 3.3 *Le produit d'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_{n,p}(\Bbbk)$ par un scalaire $\alpha \in \Bbbk$ est la matrice $(\alpha a_{i,j})$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha.A$ (ou simplement αA).*

Exemple 3.3

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = 2 \quad \text{alors} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*La matrice $(-1)A$ est l'**opposée** de A et est notée $-A$. La **déférence** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.*

Exemple 3.4

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Multiplication des matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 3.4 *(Produit de deux matrices)*
Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à s'avoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} + ... + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Pièges à éviter

Premier piège.

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{Mais} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième piège.

$AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple montre que l'anneau des matrices est un anneau non intègre.

3.2.4 Propriétés du produit de matrices

Proposition 3.1 *1. $A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,*
2. $A(B+C) = AB + AB$ et $(B+C)A = BA + CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,
3. $A.0 = 0$ et $0.A = 0$.

3.3 Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques

3.3.1 Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est dite **diagonale**.

La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle **la matrice identité** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.2 *Si A est une matrice $n \times p$, alors*

$$I_n.A = A \quad \text{et} \quad A.I_p = A.$$

3.3.2 La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Définition 3.5 *On appelle* ***matrice transposée*** *de A, la matrice $A^\top$ de taille $p \times n$ définie par :*

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de $A^\top$ est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de $A^\top$ (et réciproquement la j-ème colonne de $A^\top$ est la j-ème ligne de A)

Exemple 3.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.2 *1.* $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

2. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$

3. $(A^\top)^\top = A$

4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$

5. Si A est inversible, alors $A^\top$ l'est aussi et on a $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

3.3.3 La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$ sont appelée les **éléments diagonaux.**

Sa **diagonale principale** est la diagonale $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn})$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathrm{a}_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}$$

Définition 3.6 *La* ***trace*** *de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,*

$$trA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

Exemple 3.7 $\cdot$ *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, *alors* $trA = 2 + 5 = 7$.

$\cdot$ *Pour* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $trB = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorème 3.3 *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

1. $tr(A+B) = trA + trB$,

2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{k}$,

3. $tr(A^{\top}) = trA$,

4. $tr(AB) = tr(BA)$.

Définition 3.7 *Une matrice A de taille $n \times n$ est **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si*

$$A = A^{\top}$$

Définition 3.8 *Une matrice A de taille $n \times n$ est **antisymétrique** si*

$$A^{\top} = -A$$

3.3.4 Rang d'une matrice

Définition 3.9 *On définit le **rang** d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.*

Exemple 3.8 *Le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{k})$$

est par définition le rang de la famille de vecteurs de
$\mathbb{k}^2 : \left\{ v_1 = (1,2)\,,\ v_2 = (2,4)\,, v_3 = \left(\frac{-1}{2}, -1\right), v_4 = (0,0) \right\}$.
Tous ces vecteurs sont colinéaires à v_1, donc le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est 1 et ainsi $rgA = 1$.

3.4 Matrice d'une application linéaire

3.4.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient p la dimension de E et $B = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Soient n la dimension de F et $B' = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une base de F. Soit enfin $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Les propriétés des applications linéaires entre deux espaces de dimension finie permettent d'affirmer que :

· L'application linéaire f est déterminée de façon unique par l'image d'une base de E, donc par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p)$.

· pour $j \in \{1, 2, ..., p\}$, e_j est un vecteur de F et s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $B' = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de F. Il existe donc n scalaires uniques

$a_{1,j}, a_{2,j}, ..., a_{n,j}$ (parfois aussi notés $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$) tels que

$$f(e_j) = a_{1,j}u_1 + a_{2,j}u_2 + ... + a_{n,j}u_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{B'}$$

Ainsi, l'application linéaire f est entièrement déterminée par les coefficients $(a_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}}$. Il est donc naturel d'introduire la définition suivante :

Définition 3.10 *La **matrice de l'application linéaire** f par rapport aux bases B et B' est la matrice $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ dont la j-éme colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $B' = (u_1, u_2, ..., u_n)$:*

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

En termes plus simples : c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ B, exprimée dans la base d'arrivée B'. On note cette matrice $Mat_{B,B'}(f)$.

Exemple 3.9 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$définie par*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (u_1, u_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = (1, 0, 0)\,, \quad e_2 = (0, 1, 0)\,, \quad e_3 = (0, 0, 1)\,, \qquad u_1 = (1, 0)\,, \quad u_2 = (0, 1)$$

1. Quelle est la matrice de f dans les bases B et B'?

· On a $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = u_1 + u_2$. La première colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

· De même $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -2) = u_1 - 2u_2$. La deuxième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

· Enfin $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 3) = -u_1 + 3u_2$. La troisième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est

donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Ainsi

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs

$$e_1 = (1,1,0)\,, \quad e_2 = (1,0,1)\,, \quad e_3 = (0,1,1)\,, \quad \varphi_1 = (1,0)\,, \quad \varphi_2 = (1,1)$$

On montre facilement que $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et* $B'_0 = (\varphi_1, \varphi_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
Quelle est la matrice de f *dans les bases* B_0 *et* B'_0*?*
$f(e_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\varphi_1 - \varphi_2,$
$f(e_2) = (1,0,1) = (0,4) = -4\varphi_1 + 4\varphi_2,$
$f(e_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\varphi_1 + \varphi_2,$
donc

$$Mat_{B_0,B'_0}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

3.4.2 Changement de bases

Matrice de passage d'une base à une autre

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On sait que toutes les bases de E ont n éléments.

Définition 3.11 *Soit* B *une base de* E*. Soit* B' *une autre base de* E*.*
On appelle ***matrice de passage*** *de la base* B *vers la base* B'*. et on note* $P_{B,B'}$*, La matrice carrée de taille* $n \times n$ *dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base* B'*, par rapport à la base* B*.*

On résume en

La matrice de passage $P_{B,B'}$ contient -en colonnes-les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' exprimés dans l'ancienne base B

Exemple 3.10 *Soit l'espace vectorielle réel* $\mathbb{R}^2$*. Considère*

$$e_1 = (1,0)\ , \quad e_2 = (1,1)\ , \quad u_1 = (1,2)\ , \quad u_2 = (5,4)\,.$$

On considère la base $B = (e_1, e_2)$ *et la base* $B' = (u_1, u_2)$.
Quelle est la matrice de passage de la base B *vers la base* B' ?
Il faut exprimer u_1 *et* u_2 *en fonction de* (e_1, e_2). *On calcule que :*

$$u_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B \qquad u_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_B$$

La matrice de passage est donc :

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3 *1. La matrice de passage d'une base* B *vers une base* B' *est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base* B' *vers la base* B :

$$P_{B',B} = (P_{B,B'})^{-1}$$

2. Si B, B' *et* B'' *sont trois bases alors :*

$$P_{B,B''} = P_{B,B'} \times P_{B',B''}$$

Exemple 3.11 *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* B. *Définissons*

$$\begin{array}{rcl} & B_1 & = & \{(1,1,0), (0,-1,0), (3,2,-1)\} \\ et & B_2 & = & \{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,-1)\}. \end{array}$$

Quelle est la matrice de passage de B *vers* B_2 ?
On a d'abord

$$P_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad P_{B,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La proposition 3.3 *implique que* $P_{B,B_2} = P_{B,B_1} \times P_{B_1,B_2}$.
Donc on a $P_{B_1,B_2} = P_{B,B_1}^{-1} \times P_{B,B_2}$,
on trouve alors :

$$\begin{aligned} P_{B_1,B_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Formule de changement de base

· Soient E et F deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels de dimension finie.

· Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

· Soient B_E, B'_E deux bases de E.

· Soient B_F, B'_F deux bases de F.

· Soit $P = P_{B_E, B'_E}$ la matrice de passage de B_E à B'_E.

· Soit $Q = P_{B_F, B'_F}$ la matrice de passage de B_F à B'_F.

· Soit $A = Mat_{B_E, B_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B_E vers la base B_F.

· Soit $B = Mat_{B'_E, B'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B'_E vers la base B'_F.

Théorème 3.4 *(Formule de changement de base)*

$$B = Q^{-1}AP$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, nous obtenons une formule plus simple :

· Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

· Soient B, B' deux bases de E.

· Soit $P = P_{B,B'}$ la matrice de passage de B à B'.

· Soit $A = Mat_B(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B.

· Soit $B = Mat_{B'}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B'.

Le théorème 3.4 devient alors :

Corollaire 3.1

$$B = P^{-1}AP$$

Exemple 3.12 *Reprenons les deux base de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple* 3.11 *:*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,1,0), (0,-1,0), (3,2,-1)\} \\ et \qquad B_2 &= \{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,-1)\}. \end{aligned}$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base B_1 est :

$$A = Mat_{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Qu'elle est la matrice de f dans la base B_2, $B = Mat_{B_2}(f)$?

1. Nous avions calculé que la matrice de passage de B_1 vers B_2 était

$$P = P_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On calcule aussi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On applique la formule du changement de base du corollaire 3.1*:*

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.4.3 Matrice semblables

Les matrices considérées dans ce paragraphe sont des matrices carrées, éléments de $M_n(\Bbbk)$.

Définition 3.12 *Soient A et B deux matrices de $M_n(\Bbbk)$. On dit que la matrice B est semblable à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\Bbbk)$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

3.5 Exercices

Exercice 3.1 *Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de $\ker f$*.*

2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$*.*

3. Quel est le rang de A ?

Solution 3.1 *Soit* $u\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}
u \quad &\in \quad \ker f \Leftrightarrow Au = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = -3x_3,\ x_2 = x_3,\ x_4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u = (-3x_3, x_3, x_3, 0) \\
&\Leftrightarrow \quad u = x_3\,(-3, 1, 1, 0) \\
&\Longrightarrow \quad \ker f = Vect\,((-3, 1, 1, 0)) \\
& \qquad \textit{alors, } \{u\,(-3, 1, 1, 0)\} \textit{ est une base de } \ker f
\end{aligned}$$

et donc $\dim \ker f = 1$,

2. d'aprés le théorème du rang

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4$$

Donc

$$\dim \operatorname{Im} f = 3$$

Et comme

$$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$$

Alors

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$$

Et

$$rg\,(A) = \dim \operatorname{Im} f = 3$$

Exercice 3.2 *Déterminer le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution 3.2 $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

....

càd que tous les mineurs d'ordre 4 *sont nuls*

On a $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$

Le plus grand mineur non nul est d'ordre 3*, alors* $rg\,(A) = 3$

Exercice 3.3 *Soient les matrices suivantes:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A + B$, $2B - I_3$, $Tr\,(A)$, AC, DC, CD, A^T, C^T.

Exercice 3.4 *1) Donner les matrices associées aux applications linéaires dans les bases* B, $B^{'}$.

$f\,(x, y) = (x - y, x + y),$

$B = \{e_1\,(1, 0)\,,\ e_2\,(0, 1)\} \quad B^{'} = \{u_1\,(1, 1)\,,\ u_2\,(1, -1)\}$

$g\,(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y, x + y + z),$

$B = \{e_1\,(1, 0, 0)\,,\ e_2\,(0, 1, 0)\,,\ e_3\,(0, 0, 1)\}$

$B^{'} = \{u_1\,(1, 2, 0)\,,\ u_2\,(0, 1, -1)\,,\ u_3 = (1, 3, 0)\}$

2) Ecrire les matrices de passage de B *à* B_1 *et de* $B^{'}$ *à* $B_1^{'}$ *telles que:*

$B = \{e_1\,(1, 0)\,,\ e_2\,(0, 1)\} \quad B_1 = \left\{e_1^{'}\,(1, 2)\,,\ e_2^{'}\,(1, 1)\right\},$

$B^{'} = \{u_1\,(1, 2, 0)\,,\ u_2\,(0, 1, -1)\,,\ u_3 = (1, 3, 0)\}$

$B_1^{'} = \left\{u_1^{'}\,(1, 1, 1)\,,\ u_2^{'}\,(0, -2, 1)\,,\ u_3^{'} = (1, 2, 0)\right\}.$

3) Ecrire les matrices associées aux applications précédentes relativement aux nouvelles bases

Chapitre 4

Déterminants

4.1 Déterminant en dimension 2 et 3

4.1.1 Matrice 2×2

En dimension 2, le déterminant est trés simple à calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

4.1.2 Matrice 3×3

Soit $A \in M_3(\mathbb{k})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Voici la formule "**règle de sarrus**" pour le déterminant:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Exemple 4.1 *Calculons le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *par la règle de sarrus*

$\det A = (2 \times (-1) \times 1) + (1 \times 3 \times 3) + (0 \times 1 \times 2) - (3 \times (-1) \times 0) - (2 \times 3 \times 2) - (1 \times 1 \times 1) = -6.$

4.1.3 Déterminants de matrices particulières

Proposition 4.1 *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.*

Corollaire 4.1 *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.*

4.1.4 Propriétés des déterminants

Soient A, A_1, A_2 des matrices carrés d'ordre $n \times n$, tels que A_1 est obtunue par la multiplication de la colonne j de la matrice A par un scalair λ, et A_2 est obtunue par la multiplication d'une colonne j et une ligne i de la matrice A par des scalairs λ et μ

Proposition 4.2 *1.* $\det(A_1 \times A_2) = \det A_1 \times \det A_2$,
2. $\det A_1 = \lambda \times \det A$,
3. $\det A_2 = \lambda \times \mu \times \det A$,
4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \times \det A$,
5. Si A inversible, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

4.2 Calcul de déterminants

4.2.1 Déterminant et matrice élémentaires

pour chacune des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A, on associe une matrice élémentaire E, telle que la matrice obtenue par l'opération élémentaire sur A soit $A' = A \times E$.

1. $C_i \longleftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0 : E_{C_i \longleftarrow \lambda C_i}$
2. $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{k}$ (et $i \neq j$) : $E_{C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j}$
3. $C_i \longleftrightarrow : C_j : E_{C_i \longleftrightarrow C_j}$

Nous allons détailler le cas de chaque opération et son effet sur le déterminant :

Voici le détail pour les opérations élémentaires sur les lignes ou bien sur les colonnes :

1. $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, $C_i \longleftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: le déterminant est multiplié par $\frac{1}{\lambda}$.
2. $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{k}$(et $j \neq i$) : le déterminant ne change pas.
3. $L_i \longleftrightarrow L_j$, $C_i \longleftrightarrow C_j$: le déterminant change de signe.

Exemple 4.2 *Calculer* $\det A$, *où* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\textit{(opération } C_1 && \longleftrightarrow && C_2 \textit{ pour avoir un pivot en haut à gauche)} \\
& && = && (-1)\times\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&(C_1 && \longleftarrow && \frac{1}{3}C_1, \textit{ linéarité par rapport à la première colonne)} \\
& && = && (-1)\times 3\times\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
& && = && (-1)\times 3\times\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} C_3 \longleftarrow C_3 - 2C_1 \\
& && = && (-1)\times 3\times\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{pmatrix} C_3 \longleftarrow C_3 - 10C_2 \\
& && = && (-1)\times 3\times(-55) \quad \textit{car la matrice est triangulaire} \\
& && = && 165
\end{aligned}$$

4.2.2 Développement suivant une ligne ou une colonne

Cofacteur

Définition 4.1 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrées.*
· *On note A_{ij} la matrice extraire, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.*
· *Le nombre $\det A_{ij}$ est un **mineur d'ordre n-1** de la matrice A.*
· *Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ est le **cofacteur** de A relatif au coefficient a_{ij}.*

Exemple 4.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculons A_{11}, C_{11}*

$$A_{11} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & 2 & 1 \\ . & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C_{11} = (-1)^{1+1}\det A_{11} = 1.$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & . & 3 \\ 4 & . & 1 \\ . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = (-1) \times (-11) = 11$$

Pour déterminer si $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$, on peut se souvenir que l'on associe des signes en suivant le schéma d'un échiquier :

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Donc $C_{11} = +\det A_{11}, C_{12} = -\det A_{12}, C_{21} = -\det A_{21}$...

Théorème 4.1 *(Développement suivant une ligne ou une colonne).*
Formule de développement par rapport à la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Exemple 4.4 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

On choisit de développer par rapport à seconde colonne (car c'est là qu'il ya le plus de zéros) :

$$\begin{aligned}
\det A &= 0C_{11} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} \\
&\qquad \textit{(développement par rapport à la deuxième colonne)} \\
&= +2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&\qquad \textit{on n'oublie pas les signes des cofacteurs et on recommence} \\
&\qquad \textit{en développant chacun de ces deux déterminants } 3 \times 3. \\
&= +2\left(+4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) \\
&\qquad \textit{(par rapport à la première colonne)} \\
&\qquad -3\left(-4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \\
&\qquad \textit{(par rapport à la deuxième ligne)} \\
&= +2(+4 \times 5 - 0 + 1 \times (-4)) - 3(-4 \times 7 + 1 \times 11 - 0) \\
&= 83
\end{aligned}$$

4.2.3 Inverse d'une matrice

Théorème 4.2 *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée.

Nous lui associons la matrice C des cofacteurs, appelée **comatrice,** est notée $Com(A)$:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.3 *Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^{\top}$$

Exemple 4.5 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul donne que $\det A = 2$. La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+, -$). On trouve :*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et donc} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}.C^{\top} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.3 *Si A est inversible alors :*

$$\begin{aligned} \det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \\ \det(A^\top) &= \det A \end{aligned}$$

4.2.4 Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A\backslash I)$. sur les lignes

de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I\backslash B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Exemple 4.6 *Calculons l'inverse de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A\backslash I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \longleftarrow \frac{-1}{8} L_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow 2L_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - \tfrac{5}{8} L_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 - L_3.$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4.2.5 Rang et matrice inversible

Théorème 4.4 *(Matrice inversible et rang)*
Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

4.3 Applications des déterminants

4.3.1 Déterminant et base

Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension n. Fixons une base B de E. On veut décider si n vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ forment aussi une base de E. Pour cela, on écrit la matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur v_j par rapport à la base B (comme pour la matrice de passage). Le calcul de déterminant apporte la réponse à notre probléme.

Théorème 4.5 *Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension n. et $v_1, v_2, ..., v_n$, n vecteurs de E. Soit A la matrice obtenue en juxtaposant les coordonnées des vecteurs par rapport à une base B de E. Les vecteurs $(v_1, v_2, ..., v_n)$ forment une base de E si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Corollaire 4.2 *Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

forme une base si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

4.4 Calcul du rang d'une matrice

4.4.1 Mineures d'une matrice

Définition 4.2 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$. Soit k un entier inférieur à n et à p. On appelle* ***mineure d'ordre*** *k le déterminant d'une matrice carrées de taille k obtenue à partir de A en supprimant $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes.*

Noter que A n'a pas besoin d'être une matrice carrée.

Exemple 4.7 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

· Un mineur d'ordre 1 est simplement un coefficient de la matrice A.

· Un mineur d'ordre 2 est le déterminant d'une matrice 2×2 extraite de A. Par exemple, en ne retenant que la ligne 1 et 3 et la colonne 2 et 4, on obtient la matrice extraite $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Donc un des mineurs d'ordre 2 de A est $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$.

· Un mineur d'ordre 3 est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de A. Par exemple, en ne retenant que les colonnes $1, 3$ et 4 on obtient le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$$

· Il n'ya pas de mineur d'ordre 4 (car la matrice n'a que 3 lignes)

Théorème 4.6 *Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul.*

Exemple 4.8 *Soit α un paramétre réel. Calculons le rang de la matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

· Clairement, le rang ne peut pas être égal à 4, puisque 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne sauraient être indépendants.

· On obtient les mineurs d'ordre 3 de A en supprimmant une colonne. Calculons le mineur d'ordre 3 obtenu en supprimant la première colonne , en le développant par rapport à sa première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 2.$$

Par conséquent, si $\alpha \neq 2$, le mineur précédent est non nul et le rang de la matrice A est 3.
· Si $\alpha = 2$, on vérifie que les 4 mineurs d'ordre 3 de A sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Donc dans ce cas, A est de rang inférieur ou égal à 2. Or $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$(lignes 1,2, colonnes 1,2 de A) est un mineur d'ordre 2 non nul. Donc si $\alpha = 2$, le rang de A est 2.

4.5 Exercices

Exercice 4.1 *Soient les matrices suivantes:* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de la matrice A par
a) la methode de Sarus.
b) En développant suivant la première colonne puis la troisième ligne.
c) les matrices élémentaires. (faitez les opérations élémentaires sur les matrices).
2) En déduire les déterminants de A_1, A_2, A_1A_2 et A_1^{-1}.
3) En déduire le rang de A, A_1, A_2.

Solution 4.1 *1. Methode de Sarrus*
$\det A = [(3 \times 1 \times 0) + (1 \times 1 \times -1) + (2 \times 0 \times 1)] - [(-1 \times 1 \times 2) + (1 \times 1 \times 3) + (0 \times 0 \times 1)] = -2$
a. En développant suivant la première colonne, alors $j = 1$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\ &= (-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{21} \det A_{21} + (-1)^4 a_{31} \det A_{31} \\ &= 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

b. En développant suivant la troisième ligne, alors $i = 3$

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{3+j} a_{3j} \det A_{3j} \\
&= (-1)^4 a_{31} \det A_{31} + (-1)^5 a_{32} \det A_{32} + (-1)^6 a_{33} \det A_{33} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2
\end{aligned}$$

c. les matrices élémentaires

$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow}$

$= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2 \to C_2 - C_3}{\longrightarrow}$

$= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2$

2. $\cdot$ *Si on multiple la ligne 2 et la colonne 2 de la matrice* A *par les nombres* 3 *et* 2 *respectivement on obtient la matrice* A_1 *alors,*

$$\det A_1 = 2 \times 3 \times \det A = -12$$

$\cdot$ *on remarque que* $A_2 = 3 \times A$ *alors,*

$$\det A_2 = 3^3 \det A = -54$$

$$\det A_1 A_2 = \det A_1 \times \det A_2 = 648$$

$$\det A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1} = -\frac{1}{12}$$

3. $\det A \neq 0$ *alors* $rg\,(A) = 3$,

$\det A_1 \neq 0$ *alors* $rg\,(A_1) = 3$,

$\det A2 \neq 0$ *alors* $rg\,(A_2) = 3$.

Exercice 4.2 *1) Donner l'inverse des matrices suivantes en utilisant la méthode de cofacteurs, et de Gauss*

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Solution 4.2 *1. avec la methode des cofacteurs,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

avec $C = (c_{ij})$, *pour* $1 \leq i, j \leq 3$ *c'est la comatrice de* A,
On A *est inversible* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$,
$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, *alors* A *est inversible,*
$C = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,
Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. avec la methode de Gauss,
$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ *donc* A *est inversible.*
On a la matrice augmentée $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *maintenant on vas faire les operations élémentaires sur les ligne de cette matrice jusqu'à aboutir à la matrice* $\begin{pmatrix} I_3 & A^{-1} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to 3L_3 + L_2]{L_2 \to 2L_2 + L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to 5L_3 - 3L_2]{L_1 \to 5L_1 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 3L_3]{L_1 \to L_1 + L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & -5 & 20 & -30 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to \frac{1}{10} L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{2} L_3}]{L_1 \to \frac{1}{10} L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Alors , $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 4.3 *Calculer le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 4.4 *Soit la matrice A définie par :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1} *avec la methode de Gauss.*

Chapitre 5

Systèmes linéaires

Le but de ce chapitre est essentiellement pratique : il s'agit de résoudre des systémes linéaires. La partie théorique est revue et prouvée dans le chapitre "Matrices"

5.1 Méthode de Cramer

Le théorème suivant, appelé **règle de Cramer,** donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{k}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{k})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \mathbf{b}_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & \mathbf{b}_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \mathbf{b}_\mathrm{n} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 5.1 *(Règle de Cramer)*
Soit

$$AX = B$$

un système de n *équations à* n *inconnues. Supposons que* $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \cdots x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Exemple 5.1 *Résolvons le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et $\det A = 44 \quad detA_1 = -40 \quad \det A_2 = 72 \quad \det A_3 = 152.$
La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \cdots x_n = \frac{\det A_n}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

5.2 Résolution par substitution

Pour s'avoir s'il existe une ou plusieure solutions à un système linéaire, et les calculer, une première mèthode est la **substitution.** Par exemple pour le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases}$$

Nous réécrivons la première ligne $3x + 2y = 1$ sous la forme $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$. et nous remplaçons (nous substituons) le y de la seconde équation, par l'expression $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$. Nous obtenons un système équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ 2x - 7(y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x) = -2 \end{array} \right. \tag{s}$$

La seconde équation est maintenant une expression qui ne contient que des x, et on peut la résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ (2 + 7 \times \frac{3}{2}) = -2 + \frac{7}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ x = \frac{3}{25} \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'a remplacer dans la première ligne la valeure de x obtenue :

$$\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{8}{25} \\ x & = & \dfrac{3}{25} \end{array}$$

Le système (s) admet donc une solution unique $(\frac{3}{25}, \frac{8}{25})$. L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left\{ (\frac{3}{25}, \frac{8}{25}) \right\}$$

5.3 Résolution par inversion de matrice

Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Alors $A \in M_n(\mathbb{k})$ est une matrice carrée et B est un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{k})$. Pour tout second membre, nous pouvons utiliser les matrice pour trouver la solution du système linéaire.

Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :

$$X = A^{-1}B.$$

Exemple 5.2 *Résolvons le système* $\left\{ \begin{array}{c} x + y = 1 \\ x + t^2 y = t \end{array} \right.$ *suivant la valeur du paramètre* $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1.$

Première cas. *$t \neq +1$ et $t \neq -1$. Alors $t^2 - 1 \neq 0$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse*

$A^{-1} = \frac{1}{t^2-1} \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et la solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2-1} \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1} \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque $t \neq \pm 1$, l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \left(\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t+1} \right) \right\}$.

Deuxième cas. *$t = +1$. Le système s'écrit alors :$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ et les deux équations sont identiques. Il ya une infinité de solutions : $S = \{(x, 1 - x) \backslash x \in \mathbb{R}\}$.*

Troisième cas. *$t = -1$. Le système s'écrit alors :$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$, les deux équations sont clairement incompatibles et donc $S = \varnothing$.*

5.4 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

5.4.1 Systèmes échelonnés

Un système est **échelonné** si:

· Le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne. Il est **échelonné réduit** si en plus:

· le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1;

· et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple 5.3 · $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ \qquad - x_2 - x_3 \qquad = 4 \\ \qquad\qquad\qquad 3x_4 = 1 \end{cases}$ *est échelonné (mais pas réduit).*

· $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ \qquad\qquad - 2x_3 \qquad = 4 \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$ *n'est pas échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus).*

·Le système linéaire suivant à 3 équations et 4 inconnues est échelonné et réduit.

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 \qquad = 25 \\ \qquad x_2 - 2x_3 \qquad = 16 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases}$$

Ce système se résout trivialement en

$$\begin{cases} x_1 = 25 - 2x_3 \\ x_2 = 16 + 2x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

En d'autre termes, pour toute valeur de x_3 réelle, les valeurs de x_1, x_2 et x_4 calculées ci-dessus fournissent une solution du système, et on les a ainsi toutes obtenues. On peut donc décrire entiérement l'ensemble des solutions :

$$S = \{(25 - 2x_3, 16 + 2x_3, 1) \setminus x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

5.5 Méthode du pivot de Gausse

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 & L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ +x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 & L_2 \longleftarrow -L_2 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ +x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \\ 2x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ +x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 & L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

Le système est maintenant sous forme échelonnée.

Partie B. Passage à une forme réduit

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ \quad x_2 \quad - 3x_4 = 3 \quad L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_3 \\ \quad x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad 2x_4 = -8 \\ \quad x_2 \quad - 3x_4 = 3 \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_3 \\ \quad x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

On fait apparaître des 0 sur la deuxième colonne (en utilisant le pivot de la deuxième ligne) :

$$\begin{cases} x_1 \quad - 4x_4 = -2 \\ \quad x_2 \quad - 3x_4 = 3 \quad L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2 \\ \quad x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

Le système est sous forme échelonnée réduite

Partie C. Solutions. Le système est maintenant trés simple à résoudre. En choisissant x_4 comme variable libre, on peut exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de x_4 :

$$x_1 = 4x_4 - 2 \qquad x_2 = 3x_4 + 3 \qquad x_3 = -5x_4 + 4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système :

$$S = \{(4x_4 - 2, 3x_4 + 3, -5x_4 + 4, x_4) \backslash x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

5.6 Exercices

Exercice 5.1 *Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivantes en utilisant: la méthode de Cramer, la méthode de la matrice inverse, la méthode de pivot de Gauss.*

$$(S_1): \begin{cases} x - y + z = -2 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} x - y + z = -2 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ 4x - 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y = 3 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Solution 5.1 *(S_1): La solution est* $X = (1, 2, -1)$,
(S_2): La solution est $X = (-3, \ -11/4, \ -7/4)$,
(S_3): La solution est $X = (26/5, \ -11/5, \ -12/5)$.

Bibliographie

[1] *Algèbre* 2$^{\text{ème}}$ édition , Xavier Gourdon 2009.

[2] *Algèbre* 1$^{\text{er}}$ année MIAS-MASS-SM, 2$^{\text{ème}}$ édition, François Liret et Dominique Martinais, 2003.

[3] Introduction à l'algèbre linéaire et ses applications, Luc Amyotte, 2015.