Réduction des endomorphismes et applications
Cours avec exercices
(Cours d'Algèbre 3)

Hanifa Zekraoui

1^{er} juillet 2018

Table des matières

Préface

Cet ouvrage est le fruit des cours destinés aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques qui ont déjà fait leur cours en algèbre linéaire de la première année. Il est constitué de l'Algèbre 3 qui traite le sujet de la diagonalisation des endomorphismes (des matrices carrées) est leurs applications à quelques aspects mathématiques.

La réduction des endomorphismes est un outil puissant pour la détermination de plusieurs notions de l'algèbre linéaire comme le rang d'une matrice, la puissance d'une matrice, l'inverse d'une matrice inversible, etc. Comme elle a plusieurs applications dans d'autres aspects mathématiques, comme l'étude des problèmes inverses, les suites récurrentes linéaires, la résolution des équations différentielles et l'exponentielle d'une matrice. Le but de ce cours est d'exposer le théorème de la diagonalisation des endomorphismes et de le présenter aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques d'une façon simple et compréhensible.

Le polycopié est constituée de cinq chapitres, le premier chapitre expose quelques préliminaires nécessaires pour le contenu comme la somme directe des sous-espaces vectoriels, la matrice associée à une application linéaire dans des bases données et lorsqu'on change les bases, les matrices équivalentes et les matrices semblables.

Le deuxième chapitre traite les sous-espace vectoriel invariants par un endomorphisme et la présentation de la matrice associée, passant par la somme directe de deux sous-espaces vectoriels invariants et les projecteurs en déduisant le lemme des noyaux et on termine le chapitre par des exercices.

Le troisième chapitre présente les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme, le polynôme caractéristique, le théorème de Cayley- Hamilton et le polynôme minimal en terminant le chapitre par une série d'exercices.

Le quatrième chapitre présente le théorème de la diagonalisation d'un endomorphisme avec sa démonstration, la forme rationnelle, ensuite la forme normale de Jordan en exposant sa démonstration (nous mentionnons que la preuve de la forme normale de Jordan est non incluse dans le programme officiel), ensuite, nous déterminons la matrices de passage après avoir donner la notion des vecteurs propres généralisés en terminant le chapitre par une série d'exercices.

Le cinquième chapitre présente quelques applications de la diagonalisation des endomorphismes, en le terminant par quelques sujets de contrôles de l'algèbre 3 avec leurs corrigés types.

Table des notations

$\mathbb{N}$ – l'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$ – l'anneau des entiers relatifs
$\mathbb{Z}_n$ – l'anneau des entiers relatifs modulo n
$p\gcd(x, y)$– le plus grand commun diviseur de x et y
$\mathbb{R}^n$– $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n
$\mathbb{C}^n$– $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n
$\ell(E)$– l'espace des endmorphismes d'un espace vectoriel E
$\mathbb{K}[X]$– l'espace des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ (l'anneau des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$)
$\mathbb{K}_n[X]$– l'espace vectoriel des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n
$vect(X)$– l'espace vectoriel engendré par l'ensemble X
$\{e_1, ..., e_n\}$– la base canonique d'un espace vectoriel de dimension n
$\dim E$– dimension d'un espace vectoriel E
$\operatorname{Im} f$– Image d'une application linéaire f
$\ker f$–noyau d'une application linéaire f
$M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ou $M(m \times n, \mathbb{K})$–espace vectoriel des matrices $m \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$
$Gl(n; \mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$
I_n– matrice unité d'ordre n
$0_{m\times n}$– matrice zéro $m \times n$
O_n– le groupe des matrices orthogonales d'ordre n
U_n – le groupe des matrices unitaires d'ordre n
A^T– transposée de la matrice A
A^*– adjointe de la matrice A (de l'application linéaire A)
$diag(a_{11}, ..., a_{nn})$ – matrice diagonale
$f_{/L}$– la restriction de l'application f au sous-espace L
$P_{L,M}$ – projecteur sur L parallèlement à M
$J_{\lambda,k}$ ou $J_k(\lambda)$– Le bloc de Jordan d'ordre k correspondant à la valeur propre λ
$\det A$– déterminant d'une matrice carrée A
$tr(A)$– trace d'une matrice carrée A
$\oplus$– somme directe
$\langle ., . \rangle$– produit scalaire

$\overline{1,n}$ – l'ensemble des indices $\{1, 2, ..., n\}$

Chapitre 1

Quelques préliminaires pour la diagonalisation des endomorphismes

Introduction

Ce chapitre est un rappel introductif de quelques résultats de la première année qui sont nécessaires pour les autres chapitres. Nous les citons sans les démontrer, Nous allons aussi compléter le chapitre par quelques exercices de révision.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Nous laissons aux étudiants de se souvenir de la démonstration de ces résultats : les ensembles suivants λE_1 pour un scalaire λ, E_1+E_2, $E_1 \cap E_2$ sont des sous-espaces vectoriels de E, par contre $E_1 \cup E_2$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

Définition 1 *On dit que la somme E_1+E_2 est directe ssi $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et on note $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$. Si en plus $E_1 + E_2 = E$ on dit que E est décomposé en somme directe de E_1 et E_2 et que E_1 et E_2 sont supplémentaires l'un de l'autre dans E.*

Exemple 2
1. *Les axes vectoriels dans le plan forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre dans le plan.*
2. *Les ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre dans l'espace des fonctions réelles.*
3. *L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre dans l'espace des matrices carrées sur un corps de caractéristique $\neq 2$.*

Pour $n \geq 3$, on peut généraliser la définition 1 à une famille $\left\{E_i, i = \overline{1,n}\right\}$ comme suit :

Définition 3 *On dit que la somme $E_1 + E_2 + ... + E_n$ est directe ssi pour tout $i = \overline{2,n}$, nous avons*

$$E_1 \cap (E_2 + ... + E_{i-1}) = \{0\} \ \text{ et } E_i \cap (E_1 + ... + E_{i-1}) = \{0\}$$

et on note

$$E_1 + ... + E_n = E_1 \oplus ... \oplus E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i.$$

Proposition 4 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $E = E_1 \oplus E_2$.

ii) *pour tout $x \in E$ il existe un unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.*

iii) *Pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.*

Théorème 5 *(Conséquence du théorème de la base incomplète) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, il existe un sous-espace supplémentaire (non unique) de F dans E.*

Applications linéaires et matrices associées

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimensions n et m respectivement.

Définition 6 *Toute application f de E dans F préservant l'addition et la multiplication par un scalaire s'appelle application linéaire.*

On peut réunir les deux propriétés

$$\begin{aligned} \forall x,\, y &\in E,\, f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \alpha &\in \mathbb{K}, \forall x \in E,\, f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{aligned}$$

par la suivante

$$\forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{K}, \forall x,\, y \in E,\, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Soient $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $\left\{u_i, i = \overline{1,m}\right\}$ deux bases de E et F resp., alors pour tout $i = \overline{1,m}$ et tout $j = \overline{1,n}$ il existe des scalaires $a_{ij} \in \mathbb{K}$, tels que

$$f(v_j) = a_{1j}u_1 + ... + a_{mj}u_m.$$

Ainsi, il existe une matrice $M = (a_{ij})_{m\times n}$ s'appelle la matrice associée à f dans les bases données. Inversement, si on donne une matrice $A = (a_{ij})_{m\times n}$, alors il existe une application linéaire f associée à A dans les bases canoniques de E et F resp. définie par

$$\forall x \in E,\, f(x) = Ax.$$

– Si $E = F$, on a

$$u_j = I(u_j) = p_{1j}v_1 + ... + p_{nj}v_n,$$

alors la matrice associée à l'application identique I de E représente la matrice de passage P de la base $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à la base $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$. La matrice inverse P^{-1} est la matrice de passage de la base $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à la base $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$.

– Si on change les bases $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $\left\{u_i, i = \overline{1,m}\right\}$ de E et F à des bases $\left\{v'_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $\left\{u'_i, i = \overline{1,m}\right\}$, on obtient une nouvelle matrice $M' = \left(a'_{ij}\right)_{m\times n}$ associée à f. Il est intéressant de savoir quelle est la relation entre M et M'. On peut répondre par deux méthodes :

1) Méthode directe qui consiste à calculer M' en utilisant les matrices de passage $P = (p_{ij})_{n\times n}$ de $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à $\left\{v'_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $Q = (q_{ij})_{m\times m}$ de $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à $\left\{u'_i, i = \overline{1,n}\right\}$:

$$\begin{aligned} f\left(v'_j\right) &= a'_{1j}u'_1 + ... + a'_{mj}u'_m \qquad (1.1) \\ &= a'_{1j}\left(q_{11}u_1 + ... + q_{m1}u_m\right) + ... + a'_{mj}\left(q_{1m}u_1 + ... + q_{mm}u_m\right) \\ &= \left(q_{11}a'_{1j} + ... + q_{1m}a'_{mj}\right)u_1 + ... + \left(q_{m1}a'_{1j} + ... + q_{mm}a'_{mj}\right)u_m \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f\left(v_j'\right) &= f\left(p_{1j}v_1 + ... + p_{nj}v_n\right) = p_{1j}f\left(v_1\right) + ... + p_{nj}f\left(v_n\right) \qquad (1.2) \\ &= p_{1j}\left(a_{11}u_1 + ... + a_{m1}u_m\right) + ... + p_{nj}\left(a_{1n}u_1 + ... + a_{mn}u_m\right) \\ &= \left(a_{11}p_{1j} + ... + a_{1n}p_{nj}\right)u_1 + ... + \left(a_{m1}p_{1j} + ... + a_{mn}p_{nj}\right)u_m \end{aligned}$$

Des deux équations (1.1) et (1.2) et pour $i = \overline{1,m}$ et $j = \overline{1,n}$ on obtient l'égalité des deux produit des matrices

$$QM' = MP$$

ce qui donne

$$M' = Q^{-1}MP. \qquad (1.3)$$

2) Méthode indirecte reliée à la composition des applications linéaires donne enfin le résultat (1.3)

– Si $E = F$, et si on considère que la base de départ et d'arrivé est $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$, ensuite on la change à la base $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$, alors l'équation (1.3) devient

$$M' = P^{-1}MP \qquad (1.4)$$

Définition 7 *Les matrices M et M' dans l'équation (1.3) sont dites équivalentes, alors que celles dans (1.4) sont dites semblables.*

Série d'exercices

Exercice 8 *On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$: $a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$.*

Soit $F = Vect(\{a_1, a_2\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, a_2\}$, et $G = Vect(\{a_3, a_4\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_3, a_4\}$.

1. *Montrer que $E = F \oplus G$.*
2. *Construire deux applications linéaires π et π' de E dans lui-même (E peut être un espace vectoriel quelconque, non nécessairement celui donné en haut), tels que $\ker \pi = G$, $\ker \pi' = F$ et $I = \pi + \pi'$.*
3. *Déduire que $\pi^2 = \pi = I - \pi'$ et $\pi\pi' = \pi'\pi = 0$. (π et π' s'appellent* ***projecteurs*** *sur F et G resp.)*

Exercice 9 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $E_a = \{P \in E, (X-a) \text{ divise } P\}$.*

1. *Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c,d) tel que $1 = c(X-a) + d(X-b)$.*

2. *Déduire que* $E = E_a + E_b$*, la somme est-elle directe ?*

Exercice 10 *soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Utiliser les supplémentaires de* $F \cap G$ *dans* F *et* G *pour montrer que* $\dim (F+G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$*.*

Exercice 11 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^4$ *définie par*

$$f(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$$

1. *Montrer que* f *est linéaire.*
2. *Écrire la matrice de* f *dans les bases canoniques.*
3. *Soient* $v_1 = (1,2,0)$*,* $v_2 = (2,1,0)$*,* $v_3 = (0,1,-1)$*,* $u_1 = (1,-1,0,0)$*,* $u_2 = (2,1,0,0)$*,* $u_3 = (0,1,-1,0)$*,* $u_4 = (0,0,1,1)$*. Montrer que* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *et* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *sont des bases de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^4$ *respectivement.*
4. *Écrire la matrice de* f *dans les nouvelles bases.*
5. *Utiliser les matrices de passage* P *et* Q *et la question* 2 *pour déterminer la matrice de* f *dans les nouvelles bases.*

Exercice 12 *Soit* f *l'application linéaire de* $\mathbb{R}^4$ *donnée par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $v_1 = (-2,1,5,0) \in \ker(f - I_4)$*,* $v_2 = (-3,1,5,0) \in \ker(f - 2I_4)$*. En déduire que* v_1*,* $v_2 \in \operatorname{Im} f$*.*
2. *Déterminer* v_3 *et* v_4 *tels que* $f(v_3) = 2v_3 + v_2$*,* $f(v_4) = 2v_4 + v_3$*. En déduire que* v_3*,* $v_4 \in \operatorname{Im} f$*.*
3. *Montrer que* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$*. En déduire que* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$*. Que peut-on dire de* f*?*
4. *Écrire la matrice de* f *dans la base* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*.*
5. *Partager la matrice déterminée dans la question* 4 *en blocs diagonale, en déduire son inverse.*

Exercice 13 *Soient* A *et* B *deux matrices d'ordre* n*.*

1. *Montrer que* $\det(AB) = \det(BA)$*. En déduire que les matrices semblables ont le même déterminant.*
2. *Les mêmes questions pour la trace.*

3. *Vérifier l'identité*

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}.$$

En déduire que

$$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA).$$

Exercice 14 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \ell(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer que la matrice de f est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ *ou à* $\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 *Soit $f \in \ell(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice associée dans la base canonique est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $v_1(0,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Montrer que la matrice associée à f dans cette base est*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En déduire A^n.

Exercice 16 *Soit $A = P^{-1}DP$ où $D \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ et $P \in Gl(n;\mathbb{K})$. Montrer que pour tout polynôme $f(X) \in \mathbb{K}[X]$, $f(A) = P^{-1}f(D)P$.*

Chapitre 2

sous-espaces vectoriels invariants par un endomorphisme

Introduction

La théorie des sous-espaces stables (invariants) est très large, riche et aussi compliquée. Son existence est dérivé de la structure de $\mathbb{K}[X]$-module et les idéaux d'un anneau et couvre une partie importante des matrices symétriques et Hermitiennes et s'étend à les matrices carrées, et mêmes aux espaces de Hilbert. Elle repose sur les corps algébriquement clos et l'anneau des polynômes sur ses corps. Le but de cette théorie et de décomposer l'espace vectoriel en somme directe de sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme, ce qui donne une présentation matricielle réduite à cet endomorphisme permettant de performer les opérations algébriques et de composer les fonctions numériques sur ces endomorphismes de manière facile et semblable aux celles performées sur les nombres. Plusieurs théorèmes et décompositions en relation sont le fruit de cette théorie, citons le théorème de Cayley-Hamilton et la forme normale de Jordan (en particulier les endomorphismes nilpotents), le théorème des décompositions invariantes et la forme rationnelle, ces derniers feront l'objet des chapitre prochains. La théorie a aussi lien avec les groupes finis, les groupes spéciaux, la géométrie projective, et l'algèbre de Lie. Dans ce chapitre nous allons introduire les notions d'invariance et quelques résultats qui servent notre intérêt pour les chapitres prochains, en terminant par une

Série d'exercices en relation.

Dans ce chapitre et qui suivent $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (sauf exception), en général, soit réel ou complexe, E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $u \in \ell(E)$ et M_u la matrice associée à u dans la base initiale donnée.

sous-espaces vectoriels invariants

Définition 17 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est invariant (ou encore stable) par u si $u(F) \subseteq F$, c'est-à-dire : $\forall x \in F$, $u(x) \in F$. Dans ce cas, u induit sur F un endomorphisme ($u_{/F}$ la double restriction de u à F)*

$$u_{/F} : F \rightarrow F,\ u_{/F}(x) = u(x).$$

Il est clair que $\{0\}$ et E sont des sous-espaces invariants par tout endomorphisme (ces espaces sont dits triviaux). Si E est de dimension 1, alors $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces invariants.

Exemple 18 *L'espace vectoriel $F = vect\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est invariant par l'endomorphisme $u \in \ell(\mathbb{R}^3)$ défini par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, u(x,y,z) = (2x, 2y+z, 2z).$$

En effet, pour $v \in F$, $\exists x, y \in \mathbb{R}$, tel que $v = (x,y,0)$, d'où

$$u(v) = u(x,y,0) = (2x,2y,0) = 2(x,y,0) \in F.$$

Exemple 19 *Aucune droite vectorielle est invariante par une rotation d'angle $0 < \theta < \pi$ dans le plan.*

Définition 20 *Un endomorphisme d'un espace vectoriel non nul pour lequel les seuls sous-espaces stables sont les deux sous-espaces triviaux est qualifié d'endomorphisme irréductible.*

Représentation matricielle

Lemme 21 *Si E est muni d'une base adaptée à F (c'est-à-dire une base de F complétée en une base de E), la matrice M_u peut être notée par blocs.*

Preuve. Étant donnée $\{v_1, \cdots, v_r\}$ une base de F, on complète cette base à $\{v_1, ..., v_r, ..., v_n\}$ une base de E, ensuite on calcule la matrice M_u. On obtient

$$M_u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où $A = M_{u/F} \in M_{r\times r}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{r\times(n-r)}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{K})$.
■

Corollaire 22 *Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires l'un de l'autre et stables par u, alors la matrice M_u est représentée par une matrice de blocs diagonale*

$$M_u = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où les blocs A et B représentent respectivement les matrices associées à les restrictions de u à F et F'.

sous-espaces cycliques

Proposition 23 *Soient $u \in \ell(E)$ et v un vecteur de E non nul.*

L'ensemble $F = \{P(u)(v), P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

Preuve. D'abord, on monre que F est un sous-espace vectoriel de E.

1) Pour $P(X) = 0$, on a $P(u)(v) = 0$, d'où $0 \in F$.

2)

$$\begin{aligned} \forall P(u)(v), Q(u)(v) &\in F, \ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \\ L(X) &= \alpha P(X) + \beta Q(X) \in \mathbb{K}[X], \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha P(u)(v) + \beta Q(u)(v) = (\alpha P(u) + \beta Q(u))(v) = L(u)(v) \in F.$$

On montre que F est stable par u.

$$\forall P(u)(v) \in F, \ S(X) = XP(X) \in \mathbb{K}[X],$$

d'où

$$u(P(u)(v)) = (uP(u))(v) = S(u)(v) \in F.$$

■

Définition 24 *Soient $u \in \ell(E)$ et v un vecteur de E non nul. Le sous-espace vectoriel défini dans la proposition 23 s'appelle espace cyclique engendré par v. L'endomorphisme u s'appelle endomorphisme cyclique si l'espace cyclique engendré par v est égal à E.*

Lemme 25 *Si E est de dimension n, et $u \in \ell(E)$ est un endomorphisme cyclique, alors il existe $v \in E$ non nul pour lequel l'ensemble $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ est une base de E. La matrice de u dans cette base est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -a_0 \\ & & \vdots \\ & I_{n-1} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Preuve. 1) On montre que $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ engendre E.

Comme $\dim E = n$, alors l'ensemble $\{v, u(v), \cdots, u^{n}(v)\}$ est lié, d'où il existe $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, tel que $P(u)(v) = 0$. Comme u est cyclique, alors $E = \{L(u)(v), L(X) \in \mathbb{K}[X]\}$. Soit $L(X) \in \mathbb{K}[X]$, de la division euclidienne, il existe $Q(X)$, $R(X) \in \mathbb{K}[X]$, $d^\circ(R(X)) = n-1$, tels que

$$L(X) = P(X)Q(X) + R(X)$$

ce qui donne

$$L(u)(v) = R(u)(v) \Rightarrow E = \{R(u)(v),\ R(X) \in \mathbb{K}[X],\ d^\circ(R(X)) = n-1\}$$

ce qui montre que l'ensemble $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ engendre E.

2) On montre que l'ensemble est libre.

Si cet ensemble est lié, alors, il existe un plus petit entier $0 \leq k < n-1$ pour lequel l'ensemble $\left\{v, u(v), \cdots, u^{k}(v)\right\}$ est libre. De la même manière dans 1), il existe $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $> k$, $P(u)(v) = 0$. En utilisant encore la division euclidienne, on obtient

$$E = \{R(u)(v),\ R(X) \in \mathbb{K}[X],\ d^\circ(R(X)) = k\}.$$

Ainsi, l'ensemble $\left\{v, u(v), \cdots, u^{k}(v)\right\}$ engendre E, ce qui donne $\dim E = k+1 < n$. Par conséquent, $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ est libre. Ainsi, c'est une base de l'espace cyclique E.

Maintenant nous allons chercher la matrice associée à u dans la base $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$.

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, tel que $P(u)(v) = 0$, alors

$$u^n(v) = -a_0 v - a_1 u(v) - \cdots - a_{n-1}u^{n-1}(v).$$

Ecrivons les images par u des vecteurs de la base $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ dans cette base, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(v) &= 0.v + 1.u(v) + 0.u^2(v) + \cdots 0.u^{n-1}(v) \\ u(u(v)) &= u^2(v) = 0.v + 0.u(v) + 1.u^2(v) + \cdots 0.u^{n-1}(v) \\ &\vdots \\ u\left(u^{n-1}(v)\right) &= u^n(v) = -a_0 v - a_1 u(v) - \cdots - a_{n-1}u^{n-1}(v). \end{aligned}$$

Ainsi nous avons la matrice en question. ■

Il est clair que le polynôme unitaire $P(X)$ de degré $n = \dim E$ est le polynôme de degré minimal pour lequel $P(u)(v) = 0$. Notons aussi que dans ce cas

$$P(u)(v) = 0 \text{ implique } P(u) = 0$$

Définition 26 *Soit $u \in \ell(E)$ un endomorphisme cyclique. Le polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, de degré $n = \dim E$, tel que $P(u) = 0$ s'appelle le polynôme minimal de u. La matrice définie dans le lemme 25 s'appelle la matrice compagnon de $P(X)$.*

sous-espaces caractéristiques

Soient $u \in \ell(E)$ et $P(X) \in \mathbb{K}[X]$. Les sous-espaces $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u. Pour que cette construction soit intéressante ($\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ non nuls et non égals à E) il est nécessaire que l'endomorphisme $P(u)$ soit à la fois non nul et non inversible. C'est ce qui arrive en dimension finie lorsque $P(X)$ est un diviseur strict du polynôme minimal de u. Soient $m(X)$ le polynôme minimal de u de degré > 1 et λ l'une de ses racines, alors $P(X) = X - \lambda$ est un deviseur strict de $m(X)$. Le lemme suivant nous indique une partie des espaces stables par u.

Lemme 27 *Soient* $\dim E = n$, $u \in \ell(E)$ *et λ une racine du polynôme minimal de u. Alors, les sous-espaces vectoriels* $\ker(u - \lambda I)^\nu$ *pour* $0 \leq \nu \leq n$ *sont stables par u.*

Preuve. Soit $v \in \ker(u - \lambda I)^\nu$; montrons que $u(v) \in \ker(u - \lambda I)^\nu$

$$v \in \ker(u - \lambda I)^\nu \Rightarrow (u - \lambda I)^\nu (v) = 0$$

D'autre part, du fait que $(X - \lambda)^\nu X = X(X - \lambda)^\nu$, alors les endomorphsmes u et $(u - \lambda I)^\nu$ commutent (i.e.$(u - \lambda I)^\nu u = u(u - \lambda I)^\nu$). Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
(u - \lambda I)^\nu (u(v)) &= ((u - \lambda I)^\nu u)(v) = (u(u - \lambda I)^\nu)(v) \\
&= u((u - \lambda I)^\nu (v)) = u(0) = 0 \Rightarrow u(v) \in \ker(u - \lambda I)^\nu
\end{aligned}$$

■

Définition 28 *Les sous-espaces définis dans le lemme 27 sont appelés sous-espaces caractéristiques. En particulier, pour $\nu = 1$ ils sont appelés espaces propres.*

La série des exercices qui suit donne un bagage important pour le concept des sous-espaces invariants comme la commutation et stabilité, sous-espaces stables et dualité, Stabilité et trigonalisation, etc.

Le lemme des noyaux

Le lemme des noyaux, aussi appelé théorème de décomposition des noyaux, est un résultat sur la réduction des endomorphismes. Si $u \in \ell(E)$ est annulé par un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, alors ce lemme prévoit une décomposition de E comme somme directe de sous-espaces vectoriels stables par u. Ces derniers se définissent comme noyaux de polynômes en u et les projecteurs associés sont eux-mêmes des polynômes en u. Le lemme des noyaux conduit à la décomposition de Dunford (tout endomorphisme u est la somme d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n) puis à la décomposition de Jordan qui vient dans le chapitre prochain. Comme conséquence du corollaire 22, le lemme des noyaux montre q*u'un opérateur u est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé à racines simples* (c'est donc le polynôme minimal de u), les noyaux dans ce cas sont de dimension 1). Ce résultat et ses interprétations peuvent être clarifiés dans le chapitre prochain comme condition nécessaire est suffisante pour la diagonalisation des endomorphismes.

Théorème 29 *(le lemme des noyaux) Soient $u \in \ell(E)$ et $P_1(X)$, $P_2(X) \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Alors,*

$$\ker (P_1(u)\, P_2(u)) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u).$$

De plus, les restrictions à $\ker P_1P_2(u)$ des projections sur un noyau parallèlement à l'autre sont des polynômes en u.

Remarque 30 *Si $P_1P_2(u) = 0$, alors $\ker P_1P_2(u) = E$. Ainsi, le lemme des noyaux s'applique pour le polynôme minimal de u sur un corps (ou plus au moins, sur un anneau admettant une décomposition en facteurs premiers).*

Preuve. la preuve du théorème

Comme $P_1(X)$ et $P_2(X)$ sont premiers entre eux, alors il existe $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ tels que

$$Q_1(X)\, P_1(X) + Q_2(X)\, P_2(X) = 1,$$

évaluant en u on obtient

$$Q_1(u)\, P_1(u) + Q_2(u)\, P_2(u) = I \tag{2.1}$$

Les endomorphismes $P_1(u)$, $Q_1(u)$, $Q_2(u)$, $P_2(u)$ sont tous des polynômes en u, donc ils commutent l'un avec les autres. Prenant la restriction de u à $\ker P_1(u)\, P_2(u)$ et appliquant l'exercice 8, N°2, 3, Chapitre 1, on obtient deux projecteurs

$$\pi = Q_1(u)\, P_1(u)\,,\ \pi' = Q_2(u)\, P_2(u)\,.$$

Reste à montrer que $\ker P_1(u) = \ker \pi$ et de la même façon, $\ker P_2(u) = \ker \pi'$ et $\ker (P_1(u) P_2(u)) = \ker \pi\pi'$.

En effet,

$$v \in \ker P_1(u) \Rightarrow P_1(u)(v) = 0 \Rightarrow Q_1(u) P_1(u)(v) = 0$$

ce qui montre que $\ker P_1(u) \subseteq \ker \pi$. Maintenant,

$$v \in \ker \pi \Rightarrow Q_1(u) P_1(u)(v) = 0,$$

de l'égalité (2.1), on a

$$\begin{aligned} v &= (Q_2(u) P_2(u))(v) \Rightarrow P_1(u)(v) = P_1(u)((Q_2(u) P_2(u))(v)) \\ &= Q_2(u)(P_1(u) P_2(u)(v)) = Q_2(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $\ker \pi = \ker P_1(u)$. ■

Série d'exercices

Exercice 31 *Montrer que*

1. *Tout endomorphisme d'une droite vectorielle est irréductible*
2. *Toute rotation d'un plan euclidien dont l'angle n'est pas un multiple de π est irréductible.*
3. *En dimension finie, un endomorphisme est irréductible si et seulement s'il est cyclique et si son polynôme minimal est irréductible.*

Exercice 32 *Soit $u, v \in \ell(E)$.*

1. *Montre que* $\ker u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *sont stables par u.*
2. *Si $u \circ v = v \circ u$, montrer que* $\ker u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *sont stables par v. Donner un exemple numérique pour démontrer que la réciproque n'est pas vraie.*
3. *Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, Si $u \circ v = v \circ u$, montrer que* $\ker P(u)$ *et* $\operatorname{Im} P(u)$ *sont stables par v. (Ce qui montre que le résultat dans la question 2 est particulier).*
4. *En particulier, montrer que* $\ker P(u)$ *et* $\operatorname{Im} P(u)$ *sont stables par u.*
5. *Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 33

1. *Montrer que l'intersection de sous-espaces stables par $u \in \ell(E)$ est stable par u.*

2. *Même question pour la somme.*

Exercice 34 *Supposons que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (vous pouvez considérer $E = \mathbb{R}^n$ et pour $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in E$, $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$) et soit F un sous-espace vectoriel de E. On définit l'orthogonal de F par*

$$F^\perp = \{x \in E; \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\} .$$

Pour $u \in \ell(E)$, u^* est défini par $\forall x,\ y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

1. *Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.*
2. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les droites vectorielles stables par A. À l'aide de la question 1, déduire les plans vectoriels stables par A.*
3. *Même question pour $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.*

Chapitre 3

Valeurs propres et vecteurs propres

Introduction

Les valeurs propres et les vecteurs propres sont les moyens principaux pour la réduction des endomorphismes. Il s'agit de déterminer la matrice de passage d'une base où l'endomorphisme est présenté par une matrice à coefficients non nuls occupant presque tout le carré à une matrice plus simple : diagonale ou diagonale en bloc. Cette matrice de passage est complètement formée des vecteurs propres ou une moitie des vecteurs propres et l'autre moitie des vecteurs propres généralisés dont leur calcul est toujours basé sur les vecteurs propres et les valeurs propres.

Définition 35 *Soit $u \in \ell(E)$. On appelle vecteur propre de u tout $v \in E$, non nul, pour lequel il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u(v) = \lambda v$. λ s'appelle valeur propre associée à v.*

Vecteurs propres et sous-espaces stables

Nous avons déjà introduit par la définition 28, chapitre 2, la notion des espaces caractéristiques en général et les espaces propres en particulier. Dans ce paragraphe nous allons collecter quelques propriétés de ces espaces et leur relation avec les valeurs propres, en laissant les preuves aux étudiants.

Propriétés

- Le vecteur nul est un vecteur propre associé à toutes les valeurs propres. Donc quand on parle des vecteurs propres, il s'agit des vecteurs non nuls.
- Si v est un vecteur propre, alors v et $u(v)$ sont liés dans $\operatorname{Im} u$ et que v est l'un des générateurs de $\operatorname{Im} u$.
- Si v est un vecteur propre associé à une valeur propre λ, alors tout multiple de v est aussi un vecteur propre associé à la même valeur λ.
- L'ensemble des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de E noté V_λ ou E_λ, c'est l'espace propre $V_\lambda = \ker(u - \lambda I)$ (de la définition 28, chapitre 2, on déduit que la valeur propre de u est une racine du polynôme minimal de u).
- Pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$. En d'autre terme, les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes sont libres.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont stables par cet endomorphisme (voir Lemme 27, chapitre 2).
- Les espaces vectoriels de dimension 1 (les droites vectorielles) stables par un endomorphisme sont des espaces propres pour cet endomorphisme. L'exemple suivant montre que les espaces propres ne sont pas nécessairement de dimension 1.

Exemple 36 *La matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *a un espace propre* $V_{\lambda=2} = \operatorname{vect}(e_1, e_2)$.

Le théorème suivant découle de la définition et des propriétés précédentes :

Théorème 37 *On considère un scalaire λ et $u \in \ell(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *λ est une valeur propre de u.*

ii) *Il existe un vecteur propre non nul de u de valeur propre λ.*

iii) *Le système linéaire $(u - \lambda I)(v) = 0$ a au moins une solution non nulle (on dit aussi non triviale, puisque le vecteur nul est toujours solution).*

iv) $\ker(u - \lambda I)$ *n'est pas réduit au seul vecteur nul.*

v) *L'endomorphisme* $u - \lambda I$ *est non injectif (ainsi non bijectif).*

vi) *Le rang de* $(u - \lambda I)$ *n'est pas maximum (autrement dit strictement inférieur à la dimension* n *de* E*).*

vii) $\det(u - \lambda I) = 0$.

Donc, la recherche des valeurs propres d'un endomorphisme (d'une matrice) est caractérisée par la résolution de l'équation $\det(u - \lambda I) = 0$, c'est pour cela qu'on l'appelle *équation caractéristique* de u.

Exemple 38 *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. *Appliquons le théorème précédent,* λ *est une valeur propre de* $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$, *ce qui donne*

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 30 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 7.$$

Cherchons maintenant les vecteurs propres (les espaces propres). Soit $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

v_1 *est associé à* $\lambda_1 = -4$, *alors* $(A - (-4) I_2)(v_1) = 0$, *ce qui donne*

$$\begin{cases} 5x + 6y & = 0 \\ 5x + 6y & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $v_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5}{6} \end{pmatrix}$. *De la même manière on trouve* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique

Définition 39 *Soit* $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. *On appelle mineur principal de* M *d'ordre* k, *le déterminant d'une sous matrice de* M *d'ordre* k *obtenue en supprimant* $m - k$ *lignes et* $n - k$ *colonnes de mêmes indices de la matrice* M.

Notation 40 *Soit* M *une matrice carrée d'ordre* n. *On note* $\det M_{i,i}$ *pour le mineur principal de* M *d'ordre* $n - 1$, *obtenu en supprimant la ligne et la colonne du même indice* i *de la matrice* M, $\det M_{i,j}$ *pour le mineur non principal de* M *d'ordre* $n - 1$, *obtenu en supprimant la ligne d'indice* i *et la colonne d'indice* j *de la matrice* M, *et* $\det M_{I,J}$ *pour le mineur de* M *d'ordre* $n - k$, *obtenu en supprimant les lignes d'indices appartiennent à* I *et les colonnes d'indices appartiennent à* J *où* $I,\ J \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Exemple 41 *Les mineurs (principaux et non principaux) obtenus en retirant juste une ligne et une colonne des matrices carrées (premiers mineurs) sont nécessaires pour calculer les cofacteurs matriciels, qui sont à leur tour utiles pour calculer à la fois le déterminant et l'inverse des matrices carrées.*

Exemple 42 *Les premiers mineurs principaux et non principaux de* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *sont*

$$\det M_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5,\ \det M_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2,\ \det M_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Les premiers mineurs non principaux (en laissant les restes aux étudiants) sont

$$\det M_{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, \det M_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,\ \det M_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Les mineurs $\det M_{I,J}$ *(en laissant les restes aux étudiants) sont*

$$\det M_{\{1,2\},\{1,2\}} = \det(-2) = -2,\ \det M_{\{1,2\},\{1,3\}} = \det(3) = 3$$

Lemme 43 *Soit* $u \in \ell(E)$ *représenté par une matrice* M*. Alors* $\det(XI - u)$ *est un polynôme unitaire de degré* $n = \dim E$*, tel que son développement est donné par*

$$C(X) = X^n - a_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n$$

où les coefficients a_k *sont la somme des mineurs principaux d'ordre* k *pour* $k = \overline{1,n}$*.*

$$a_k = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}, |I| = n-k} \det M_{I,I_p},\ pour\ k = \overline{1,n}.$$

Ainsi

$$a_1 = traceM,\ a_n = \det M.$$

Définition 44 *Soit* $u \in \ell(E)$*.* $C(X) = \det(XI - u)$ *s'appelle le polynôme caractéristique de* u*.*

Coefficients du polynôme caractéristique

Le lemme 43 nous donne des informations sur les coefficients de $C(X)$ et leur relation avec des quantités plus importantes comme la trace et le déterminant de u, ainsi que les valeurs propres qui ne sont que les racines de $C(X)$. De plus, si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de u, alors les fonctions élémentaires des racines d'un polynôme nous donnent

$$trace\,(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \ \det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Exemple 45 *Le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} C(X) &= \det(XI_3 - A) \\ &= X^3 - tr(A)\,X^2 + (\det A_{1,1} + \det A_{2,2} + \det A_{3,3})\,X - \det A \\ &= X^3 - X^2 + \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) X - (-10) \\ &= X^3 - X^2 - 12X + 10. \end{aligned}$$

Lorsqu'il s'agit de la recherche des valeurs propres, il est préférable de ne pas développer le polynôme caractéristique mais de le mettre sous forme de facteurs premiers, sauf s'il est difficile de le faire.

Théorème de Cayley -Hamilton

Ce théorème a une grande importance dans le calcul matriciel, il autorise des simplifications puissantes dans les calculs de matrices comme la puissance d'une matrice, il permet d'établir des résultats théoriques, par exemple pour calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent, comme il permet de calculer l'inverse d'une matrice. Tous ces types de calcul sont illustrés par les exercices proposés à l'afin du chapitre.

Théorème 46 *Tout endomorphisme (matrice carrée) est racine de son polynôme caractéristique.*

Preuve. Soient M une matrice carrée et

$$C(X) = \det(XI_n - M) = X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Soit $adj\,(XI_n - M)$ l'adjoint classique (la comatrice) de $(XI_n - M)$. Nous avons

$$C(X)\,I_n = (XI_n - M)\,adj\,(XI_n - M).$$

Les ceofficients de $adj\,(XI_n - M)$ sont les premiers mineurs de $(XI_n - M)$ à un signe près, (voir Exemple 41), ils sont donc des polynômes de degré $\leq n-1$. Ainsi $adj\,(XI_n - M)$ est une matrice à coefficients polynômials de degré $n-1$, alors il existe un polynôme à coefficients matriciels de degré $n-1$, disant

$$adj\,(XI_n - M) = X^{n-1}I_n + B_1 X^{n-2} + \cdots + B_{n-1}.$$

En développant, et identifiant les coefficients des deux membres, on obtient

$$\begin{cases} I_n & = & I_n \\ B_1 - M & = & b_1 I_n \\ B_2 - MB_1 & = & b_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -MB_{n-1} & = & b_n I_n \end{cases}$$

On multiple les deux membres de la première équation par M^n. On multiple à gauche les deux membres de la deuxième équation par M^{n-1},..., On multiple à gauche les deux membres de l'avant dernière équation par M, ensuite on somme les deux membres des nouvelles équations obtenues, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= M^n + M^{n-1}B_1 - M^n + M^{n-2}B_2 - M^{n-1}B_1 + \cdots + MB_{n-1} - MB_{n-1} \\ &= M^n + b_1 M^{n-1} + \cdots + b_n I_n = C\,(M)\,. \end{aligned}$$

Notons que la multiplication ici est effectuée à gauche mais également on peut l'effectuer à droite car la matrice et sa comatrice commutent du fait que le produit donne la matrice scalaire. ■

Polynôme minimal

Nous avons déjà vu la définition du polynôme minimal dans le chapitre 2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, c'est donc un diviseur du polynôme caractéristique de degré minimal et qui admet u comme racine. Le lemme 25, chapitre 2, nous montre aussi que le polynôme minimal d'un endomorphisme cyclique est lui-même le polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ?

Théorème 47 *Une matrice (un endomorphisme) est cyclique si et seulement si ses polynômes minimal et caractéristique coïncident.*

Preuve. Donc il suffit de montrer la réciproque. Si les polynômes minimal et caractéristique de u coïncident, alors le polynôme minimal $m\,(X)$ est de degré n. Donc, aucun polynôme de degré $n-1$ ne s'annule pour u. Ainsi pour tout vecteur non nul $x \in E$, les vecteurs x, $u\,(x)$, ..., $u^{n-1}\,(x)$ sont libres. Donc on peut choisir un vecteur x tel que $\{x, u\,(x)\,, ..., u^{n-1}\,(x)\}$ est une base de E, ce qui indique que u est cyclique. ■

Théorème 48 *Un endomorphisme (une matrice) est cyclique si, et seulement si, tous ses sous-espaces propres sont de dimension* 1.

Preuve. D'après le lemme 25, chapitre 2, un endomorphisme u (une matrice) est cyclique si, et seulement si, u représenté par une matrice compagnon. Soit

$$C_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$C_u - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme la sous matrice $(C_u - \lambda I_n)_{n,n}$ (obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne) est de rang $n-1$, alors $C_u - \lambda I_n$ est de rang $\geq n-1$. Appliquant le théorème des dimensions, on a

$$\dim E = \dim \ker (C_u - \lambda I_n) + rg\,(C_u - \lambda I_n)\,.$$

Du fait que λ est valeur propre de C_u, $\dim \ker (C_u - \lambda I_n) \neq 0$, alors, $\dim \ker (C_u - \lambda I_n) = 1$ ■

.

Théorème 49 *Soit $u \in \ell(E)$. Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u ont les mêmes racines. En d'autres termes, λ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est racine de son polynôme minimal.*

Preuve. Soit λ une valeur propre de u et $m(X)$ le polynôme minimal de u. Il existe donc un vecteur v non nul tel que $u(v) = \lambda v$. Il est facile de montrer que pour tout entier $k > 0, u^k(v) = \lambda^k v$. On déduit que pour tout polynôme $P(X) \in [X]$, on a

$$P(u)(v) = P(\lambda)\,v$$

Appliquons ce résultat pour le polynôme minimal, nous obtenons

$$0 = m(u)(v) = m(\lambda)\,v$$

Comme le vecteur v est non nul on en déduit que $m(\lambda) = 0$.

Réciproquement, soit λ une racine de $m(X)$. Alors il exste $Q(X)$, tel que

$$m(X) = (X - \lambda) Q(X)$$

ce qui donne

$$0 = m(u) = (u - \lambda Id) \circ Q(u)$$

Cela implique que

$$\operatorname{Im} Q(u) \subset \ker (u - \lambda Id)$$

Comme le degré de $Q(X)$ est strictement inférieur au degré de $m(X)$, alors $Q(u) \neq 0$. Il en résulte que

$$\ker (u - \lambda Id) \neq \{0\}$$

Par conséquent λ est une valeur propre de u. ■

Série d'exercices

Exercice 50 *1. Montrer chaque point dans les propriétés citées dans le deuxième paragraphe.*

2. *Déduire que u est non injectif si et seulement si 0 est une valeur propre de u.*

Exercice 51 *1. Déterminer la matrice de rotation dans le plan.*

2. *Monter que la matrice de rotation dans le plan n'a pas de sous-espaces invariants.*

Exercice 52 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f .*
2. *Déterminer les vecteurs propres de f .*
3. *Soit u un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs v et w tels que*

$$f(v) = 2v + u \text{ et } f(w) = 2w + v.$$

4. *En déduire les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de f.*

5. *Soit* e *un vecteur propre de* f *pour la valeur propre* 1. *Démontrer que* (e, u, v, w) *est une base de* $\mathbb{R}^4$.
6. *Donner la matrice de* f *dans cette base. La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
7. *En déduire le lemme des noyaux pour* f.

Exercice 53 *Résoudre dans* $M_3(\mathbb{R})$ *l'équation* $X^2 = A$, *où*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour n *entier relatif donné, calculer* A^n *par trois méthodes différentes.*

Exercice 55 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *Déterminer* $\ker (A - I)^2$.
3. *Montrer que* A *est semblable à une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
4. *Calculer* A^n *pour* n *entier naturel donné.*

Exercice 56 *Soit* $A \in M(n, \mathbb{R})$ *vérifiant* $rg(A) = 1$. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $A^2 = \lambda A$ *et que ce scalaire est une valeur propre de* A.

Exercice 57 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A *et déterminer ses valeurs propres.*
2. *On note* $\lambda_1 > \lambda_2$ *les valeurs propres de* A, E_1 *et* E_2 *les sous-espaces propres associés. Déterminer une base* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *telle que* $\varepsilon_1 \in E_1$, $\varepsilon_2 \in E_2$, *les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme* $(1, y)$.

3. *Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α, β) ses coordonnées dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$A^n x = \alpha \lambda_1^n \varepsilon_1 + \beta \lambda_2^n \varepsilon_2$$

4. *Notons $A^n x = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Exprimer a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.*
5. *Expliquer, sans calcul, comment obtenir à partir des questions précédentes une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.*

Exercice 58 1. *Utiliser la question 3 dans l'exercice 13, Chap.1 pour montrer que, pour deux matrices carrées quelconques A et B, les produits AB et BA possèdent les mêmes valeurs propres.*

2. *Montrer le même résultat en utilisant la définition de la valeur propre et les vecteurs propres (Indication : Utiliser l'identité $B(AB) = (BA)B$).*

Chapitre 4

Les formes canoniques

Introduction

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $u \in \ell(E)$. La décomposition des matrices en somme ou en produit de matrices plus simples est l'un des outils les plus puissants dans le calcul matriciel. En outre, elle permet d'étudier certaines propriétés des endomorphismes, chose qui ne peut pas être fait sans décomposer la matrice associée. Dans ce chapitre nous allons discuter deux formes importantes, la forme rationnelle et la forme normale de Jordan.

La forme rationnelle (Forme de Frobenius)

Nous avons déjà introduit les notions et les outils de cette forme dans le chapitre deux : les sous-espaces invariants, les sous-espaces cycliques, la matrice compagnon, le lemme des noyaux. Ce qui rend ce paragraphe plus court mais aussi plus facile à comprendre.

Une décomposition de Frobenius est une décomposition de E en somme directe de sous-espaces cycliques, telle que les polynômes minimaux (ou caractéristiques) respectifs des restrictions de u aux facteurs sont les *facteurs invariants* de u. La décomposition de Frobenius peut s'effectuer sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque (pas nécessairement algébriquement clos) ce qui permet de maintenir les coefficients de la matrice dans cette forme appartenir au même corps initial comme indiquant le théorème 59. Cette forme en plus de son importance en algèbre linéaire, intervient souvent dans les démonstrations de certains théorèmes de la théorie algébrique des nombres, ainsi elle a sa généralisation aux $\mathbb{K}[X]$ −modules, par exemple, on peut se référer à [4], un cours sur un site ou se reférer à son livre : Algebra [5].

Théorème 59 *Pour toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible P telle que*

$$P^{-1}AP = diag\left(C_{p_1}, \cdots C_{p_k}\right)$$

où C_{p_i} désignent les matrices compagnons des polynômes unitaires $p_i(X) \in \mathbb{K}[X]$ pour $i = \overline{1,k}$. Les $p_i(X)$ s'appellent les facteurs invariants de A et satisfont la condition $p_i(X)$ divise $p_{i+1}(X)$ pour $i = \overline{1,k-1}$. $p_k(X)$ est le polynôme minimal de A et $\prod_{i=1}^{k} p_i(X) = c(X)$ est son polynôme caractéristique.

La forme normale de Jordan

Une forme normale de Jordan d'une matrice carrée est une matrice triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale et les uns dans chaque entrée non nulle hors diagonale (au dessus de la diagonale de la matrice). En d'autres termes, il s'agit d'une matrice bloc diagonale formée de blocs de Jordan. Mettre une matrice carrée sous sa forme normale de Jordan nécessite de connaître son polynôme caractéristique et son polynôme minimal et de trouver les valeurs propres de la matrice. En outre, on cherche les vecteurs propres associés et les vecteurs propres généralisés. Ces derniers forment ensemble une base dans laquelle on passe de la forme initiale à la forme réduite (normale) de Jordan. Cette base s'appelle *base de Jordan*. Dans de nombreux manuels, le concept de forme normale Jordan relève de la diagonalisation des matrices carrées.

Définition 60 *Un bloc de Jordan d'ordre n associé à la valeur propre λ noté souvent par $J_{\lambda,n}$ ou $J_n(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre n sous* *la forme*

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & . \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & \lambda & 1 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Le bloc de Jordan $J_n(\lambda)$ peut aussi être écrit sous la forme

$$J_n(\lambda) = \lambda I_n + N \tag{4.1}$$

où N est nilpotente d'indice n.i.e. $N^{n-1} \neq 0$ et $N^n = 0$. En outre, il peut être vu comme le bloc de Jordan $J_n(0)$.

Similitude d'une matrice à bloc de Jordan diagonale

Théorème 61 *Pour chaque matrice carrée A sur le corps complexe (également tout corps algébriquement clos), il existe une matrice inversible P telle que*

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \\ &= diag\left(J_{n_1}(\lambda_1), \cdots, J_{n_k}(\lambda_k)\right) \end{aligned}$$

où λ_i sont les valeurs propres de A de multiplicités algébriques n_i pour $i = 1, ...k$.

De l'équation (4.1), et du théorème 61, il s'ensuit que : Pour chaque matrice carrée A sur le corps complexe, il existe une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ et une matrice niltpotente $N = J_{n_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(0)$ (l'indice de nilpotence de N est le max des indices de nilpotence de $J_{n_1}(0), \cdots, J_{n_k}(0)$), telle que $P^{-1}AP = D + N$. Les colonnes de la matrice P sont les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés de A.

Remarque 62 *Cette décomposition en somme est très utile pour la détermination des puissances élevées de la matrice.*

Preuve du théorème

Preuve. Premier cas :

Soient $c(X) = (x - \lambda)^n$ et $m(x) = (x - \lambda)^m$ le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u resp.. On a la suite des itérées des noyaux suivants

$$\ker(u - \lambda I) \subset \ker(u - \lambda I)^2 \subset \cdots \subset \ker(u - \lambda I)^m = \ker(u - \lambda I)^n = E$$

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si on a n vecteurs propres qui forment une base de $\ker(u-\lambda I)$ (dans ce cas $\ker(u-\lambda I) = E = \ker(u-\lambda I)^n$ ce qui équivalent à $m=1$). Sinon il existe au moins un vecteur propre $v_1 \in \ker(u-\lambda I)$ et $v_2 \in \ker(u-\lambda I)^2 - \ker(u-\lambda I)$, ..., $v_m \in \ker(u-\lambda I)^m - \ker(u-\lambda I)^{m-1}$ tels qu'on a la suite des itérés des vecteurs suivants

$$(u-\lambda I)(v_2) = v_1,\ (u-\lambda I)(v_3) = v_2, ...,\ (u-\lambda I)(v_m) = v_{m-1}$$

ce qui est équivalent à

$$(u-\lambda I)^{i-1}(v_i) = v_1 \text{ pour } i = \overline{2,m}$$

Ainsi nous obtenons une base d'un sous-espace E_1 de E formée du vecteur propre v_1 et les vecteurs propres généralisés v_2, ..., v_m tels que la matrice associée à la restriction de u à E_1 dans cette base est le bloc de Jordan $J_m(\lambda)$. Si $m=n$, alors on a seulement ce bloc (dans ce cas , $\dim\ker(u-\lambda I) = 1$). Supposons que $\{v_1, ..., v_k\}$ une base de $\ker(u-\lambda I)$, alors on prend $v_1$et procédant de la même façon précédente pour obtenir $m-1$ vecteurs généralisés $v_{1,2}, ..., v_{1,m}$ pour avoir le bloc $J_m(\lambda)$. On prend le vecteur v_2 et procédant de la même façon précédente pour avoir les vecteurs $v_{2,2}, ..., v_{2,s_1}$tels qu'ils soient dans le supplémentaire du sous-espace *vect* $\{v_1, v_{1,2}, ..., v_{1,m}\}$ pour obtenir un bloc $J_{s_1}(\lambda)$ avec $s_1 \leq m$. Continuons notre procédure jusqu'à épuiser tous les vecteurs d'une base de $E = \ker(u-\lambda I)^n$. On obtient exactement k blocs de jordan tels que

$$m + s_1 + s_2 + ... + s_{k-1} = n.$$

Deuxième cas :

Maintenant, supposons que le polynôme cacactéristique et le polynôme minimal de u sont respectivement

$$\begin{aligned} c(X) &= (x-\lambda_1)^{n_A} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k} \\ m(X) &= (x-\lambda_1)^{m_A} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

En premier lieu, appliquons le lemme des noyaux pour obtenir

$$\begin{aligned} E &= \ker(u-\lambda_1 I)^{n_A} \oplus \cdots \oplus \ker(u-\lambda_k I)^{n_k} \\ &= \ker(u-\lambda_1 I)^{m_A} \oplus \cdots \oplus \ker(u-\lambda_k I)^{m_k} \end{aligned}$$

Ensuite pour chaque $\ker(u-\lambda_i I)^{n_i}$ nous procédons de la même manière précédente pour obtenir une base de E telle que la matrice associée dans cette base est bloc diagonale dont les éléments diagonaux sont les blocs de Jordan. ■

La forme normale de Jordan

De la preuve précédente on peut définir la forme normale de Jordan comme suit :

Définition 63 *Soit* $c(X) = \det(A - XI)$ *le polynôme caractéristique et* $m(X)$ *le polynôme minimal de* A *tels que*

$$\begin{aligned} c(X) &= (X-\lambda_1)^{n_1} \ldots (X-\lambda_k)^{n_k} \\ m(X) &= (X-\lambda_1)^{m_1} \ldots (X-\lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

avec $m_i \leq n_i$ *pour* $i = 1, \ldots, k$. *La décomposition dans le théorème 61 s'appelle forme normale de Jordan ou plus souvent forme réduite de Jordan si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Le nombre de blocs de Jordan associés à* λ_i *est égal à* $\dim\ker(A - \lambda_i I)$ *qui ne dépasse pas* n_i.
2. *La somme des tailles (ordres) de tous les blocs de Jordan correspondant à une valeur propre* λ_i *est égale à sa multiplicité algébrique* n_i.
3. *Le plus grand bloc de Jordan correspondant à une valeur propre* λ_i *est d'ordre* m_i, *la multiplicité algébrique de* λ_i *dans le polynôme minimal (i.e.* J_{λ_i, n_i} *est une matrice bloc diagonale de blocs de Jordan de tailles pas plus grandes que* m_i *et au moins l'un d'entre eux est de taille (d'ordre)* m_i*).*

L'exemple suivant montre comment factoriser une matrice sous forme normale de Jordan :

Exemple 64 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont respectivement :

$$c(X) = (X-1)(X-2)(X-4)^2 = m(X).$$

Alors,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{1,1} & & \\ & J_{2,1} & \\ & & J_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & 0 & 4 \end{pmatrix} = J.$$

Pour déterminer P, mettons P en vecteurs colonnes $P = [p_1, p_2, p_3, p_4]$, alors $AP = PJ$, ce qui donne

$$\begin{aligned} Ap_1 &= 1p_1 \Longrightarrow (A - I)\, p_1 = 0 \ , && (4.2) \\ Ap_2 &= 2p_2 \Longrightarrow (A - 2I)\, p_2 = 0 \ , \\ Ap_3 &= 4p_3 \Longrightarrow (A - 4I)\, p_3 = 0 \ , \\ Ap_4 &= 1p_3 + 4p_4 \Longrightarrow (A - 4I)\, p_4 = p_3 \Longrightarrow \quad (A - 4I)^2\, p_4 = (A - 4I)\, p_3 = 0 && (4.3) \end{aligned}$$

Cherchons le vecteur $p_1 = (x, y, z, t)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi nous avons le système

$$\begin{cases} 4x - z + t &= 0 \\ 2x - y + 2z - t &= 0 \\ x - y + t &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$x = 0, t = y = z$$

Ainsi, la solution est le sous-espace vectoriel $\{x\,(0, 1, 1, 1)\,, x \in \mathbb{R}\}$, d'où on prend $p_1 = (0, 1, 1, 1)$. De la même façon les étudiants doivent vérifier que les autres vecteurs sont

$$p_2 = (0, 0, 1, 1)\,,\ p_3 = (1, 1, 1, 0) \ \text{ et } p_4 = (0, 0, 1, 0)\,.$$

Ainsi la matrice P est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est important de noter que p_1, p_2 et p_3 sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres 1, 2 et 4 (resp.), tandis que p_4 est un vecteur propre généralisé, car $p_4 \in \ker (A - 4I)^2$. Donc P représente la matrice de passage de la base canonique à la base de Jordan.

Exemple 65 *Un autre exemple de la forme normale de Jordan est considéré dans les exercices 52 et 55, Série d'exercices, chapitre 3.*

Série d'exercices

Exercice 66 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer* $\ker(A+I)$ *en déduisant une valeur propre de* A.
2. *À l'aide de* $Tr(A)$ *et* $\det A$, *déterminer les autres valeurs propres.* A *est-elle diagonalisable ?*
3. *Déduire le polynôme caractéristique de* A.
4. A *est-elle inversible ? Sans calcul, déduire son inverse*

Exercice 67 *Montrer les assertions suivantes :*

1. *La matrice et sa transposée possèdent les même valeurs propres. Donner un exemple où elles ont un vecteur propre différent.*
2. *Le polynôme caractéristique de* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *est égal au produit du polynôme caractéristique de* A *par celui de* C.

Exercice 68 *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \imath(E)$. *Sans utiliser le théorème de Cayley -Hamilton, montrer qu'il existe un polynôme* $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $f(u) = 0$.

Exercice 69

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'un projecteur de* E.
2. *Même question pour une rotation d'angle* θ *dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^2$ *sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 70 *Déterminer les valeurs propres, les vecteurs propres et les matrices de passage à la forme normale de Jordan des matrices suivantes :*

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\-1&1&4\end{pmatrix},\ \ C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&2\\-1&0&3\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}1+m&1+m&1\\-m&-m&-1\\m&m-1&0\end{pmatrix},$$

pour $m\in\mathbb{R}$.

Exercice 71 *Déterminer les conditions sur* a, b, c, d *pour que* $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ *soit diagonalisable.*

Exercice 72 *Soit* $a\in\mathbb{R}$, A *la matrice suivante* $A=\begin{pmatrix}0&1\\-a&1+a\end{pmatrix}$.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *par la donnée de* u_0 *et* u_1 *et la relation de récurrence suivante : pour* $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+2}=(1+a)u_{n+1}-au_n.$$

1. *Pour quelles valeurs de* a *la matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2. *Lorsque* A *est diagonalisable, calculer* A^n *pour* $n\in\mathbb{N}$.
3. *On suppose que* A *est diagonalisable. On note* U_n *le vecteur* $U_n=(u_n,u_{n+1})$, *exprimer* U_{n+1} *en fonction de* U_n *et de* A, *puis* U_n *en fonction de* U_0 *et de* A.

Exercice 73 *Soit* A *la matrice de* $M_3(\mathbb{R})$ *suivante* $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$.

1. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer* $(A-2I_3)^2$, *puis* $(A-2I_3)^n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *En déduire* A^n.

Exercice 74 1. *Soit*

$$A=\begin{pmatrix}-2&-1&1&2\\1&-1&1&2\\0&0&-5&4\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}.$$

a *Utiliser la matrice partitionnée en blocs pour déterminer le polynôme caractéristique de A.*

b *En déduire le polynôme minimal de A.*

c *Sans calcul, expliquer par deux méthodes différentes pourquoi* $\dim\ker(A+3I) \neq 4$.

d *En déduire la forme réduite de Jordan de A.*

e *Déterminer la base de Jordan.*

2. *Déterminer le polynôme minimal de chaque matrice dans les séries d'exercices de 1 à 4 et sa forme réduite de Jordan.*

Exercice 75 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déduire (sans calcul) les polynômes caractéristique et minimal de A, et la dimension de l'espace propre.

Exercice 76 *(Synthèse) Préciser les espaces propres, les espaces caractéristiques de toutes les matrices dans les séries d'exercices de 1 à 4. Lesquelles sont des matrices cycliques ?*

Chapitre 5

Quelques applications de la diagonalisation des endomorphismes

Introduction

La réduction des endomorphismes et la diagonalisation des matrices permettent de simplifier considérablement un certain nombre de calculs, comme par exemple le calcul de puissances d'une matrice, ou la résolution de systèmes différentiels linéaires. Par exemple, le calcul des puissances d'une matrice devient très simple dès lors que l'on a diagonalisé la matrice : la puissance n-ième d'une matrice diagonale s'obtient en élevant tous ses éléments à la puissance n, ce qui est faux pour des matrices non diagonales.

Application aux suites récurrentes linéaires

Soit $A \in M_m(\mathbb{K})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), donnée par la récurrence

$$X_n = AX_{n-1}, \text{ et } X_0 = (x_{01}, ..., x_{0m}) \tag{5.1}$$

Alors, la récurrence (5.1) devient

$$X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = ... = A^nX_0 \tag{5.2}$$

En appliquant la diagonalisation de A (si A est diagonalisable), on obtient facilement X_n à partir de X_0.

En effet, comme A est diagonalisable, alors il existe P inversible (formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_m comptées avec leurs multiplicités) et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)$, telles que

$$P^{-1}AP = D$$

ce qui est équivalent à

$$A = PDP^{-1}$$

La récurrence (5.2) donne

$$X_n = (x_{n1}, ..., x_{nm}) = \left(PD^nP^{-1}\right)(x_{01}, ..., x_{0m}) \tag{5.3}$$

Exemple 77 *Soient deux suites réelles $(u)_n$ et $(v)_n$ données par le système*

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5u_{n+1} & = & -u_n + 6v_n \\ 5v_{n+1} & = & 4u_n + v_n \end{array}\right. \quad \textit{avec } u_0 = \frac{5}{3},\ v_0 = 0$$

Mettons le système sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{v+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_v \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ associés à leurs valeurs propres sont $\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -5, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 5$. Appliquons la diagonalisation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 78 *Soit une suite récurrente réelle donnée par la relation de récurrence*

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n,\ u_0 = 1,\ u_1 = 5.$$

Pour retourner au cas d'un système, on pose

$$\begin{cases} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6v_{n+1} \\ v_{n+2} &= u_{n+1}. \end{cases}$$

On répète la méthode précédente, on obtient : $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, les vecteurs propres associés à leurs valeurs :* $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow$ 3

$$\begin{cases} u_n &= 5u_{n-1} - 6v_{n-1} \\ v_n &= u_{n-1}. \end{cases},\ n \geq 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$u_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Application aux équations différentielles linéaires

Cas d'un système linéaire différentiel

Soit le système différentiel linéaire, pour $n \geq 1$,

$$\frac{d}{dt} X^{(n-1)}(t) = X^{(n)}(t) = AX^{(n-1)}(t), \text{ et } X^{(0)}(t) = (x_{01}(t), ..., x_{0m}(t)) = X(t)$$

Suivons la même méthode exposée dans la section précédente, nous obtenons

$$X^{(n)}(t) = A^n X^{(0)}(t) = A^n X(t).$$

Supposons que la matrice est diagonalisable, alors pour $n = 1$, nous obtenons

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t)$$

On pose $P^{-1}X'(t) = Y'(t)$, alors, $X(t) = PY(t)$, on obtient

$$Y'(t) = DY(t)$$

i. e.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m' \end{pmatrix} = DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\frac{y_i'}{y_i} = \lambda_i,$$

ce qui donne

$$y_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t)$$

Par substitution dans $X(t) = PY(t)$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ c_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \exp(\lambda_m t) \end{pmatrix}$$

i. e.

$$X(t) = (c_1 \exp(\lambda_1 t)) V_1 + (c_2 \exp(\lambda_2 t)) V_2 + \ldots (c_m \exp(\lambda_m t)) V_m$$

où les V_i sont les vecteurs propres qui forment les colonnes de la matrice P.

Exemple 79 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Mettons-le sous la forme matricielle, nous avons

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *associés à leurs valeurs :*

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4,$$

d'où, la solution est

$$\begin{aligned} X(t) &= (c_1 \exp(-t)) V_1 + (c_2 \exp 4t) V_2 \\ &= \left(c_1 \left(-\frac{3}{2} \right) \exp(-t) + c_2 \exp(4t), c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(4t) \right) \end{aligned}$$

Cas d'une équation différentielle linéaire

Théorème 80 *Toute équation différentielle (explicite) d'ordre $n \geq 1$, linéaire, peut être transformée en un système de n équations différentielles du 1er ordre.*

En effet, soit l'équation différentielle explicite d'ordre n :

$$a_0 y + a_1 y' + ... + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0$$

Introduisons n nouvelles fonctions :

$$\begin{cases} z_1 & = & y \\ z_2 & = & y' \\ . & . & . \\ . & . & . \\ z_n & = & y^{(n-1)} \end{cases}$$

En dérivant les deux cotés du système, l'équation différentielle est alors équivalente au système différentiel portant sur les nouvelles variables

$$\begin{cases} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & z_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ z_n' & = & y^{(n)} \end{cases}$$

i. e.

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ . \\ . \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ . & . & \cdot\cdot & \cdot\cdot & . \\ . & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & . \\ -a_0 & -a_1 & \cdot\cdot & \cdot & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous nous sommes retournés au premier cas de cette section.

Exemple 81 *Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = 0$. Appliquons ce qui précède, nous obtenons : $y'' = -2y - 3y'$*

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres :

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -2,$$

ce qui donne la solution :

$$\begin{aligned} Z(t) &= (c_1 \exp(-t)) V_1 + (c_2 \exp(-2t)) V_2 \\ &= \left(-c_1 \exp(-t) - \frac{1}{2} c_2 \exp(-2t), c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(-2t)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$y(t) = z_1(t) = -c_1 \exp(-t) - \frac{1}{2} c_2 \exp(-2t).$$

Application au calcul de l'exponentielle d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n, réelle ou complexe, $\exp A$ est donnée par la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Donc obtenir une exponentielle d'une matrice carrée par la série est seulement approximatif en général. Mais si nous savons obtenir $\exp J_n(\lambda)$, $\exp D$, $\exp N$, où $J_n(\lambda)$ un bloc de Jordan, D matrice diagonale, et N nilpotente ($N^s = 0$ à partir d'un certain s) , alors le calcul de $\exp X$, X générale devient possible. On a

$$\begin{aligned} \exp N &= I + \frac{1}{2} N + .. \frac{1}{(s-1)!} N^{s-1} \\ \exp D &= diag(\exp \lambda_1, ... \exp \lambda_n) \\ J_n(\lambda) &= \lambda I_n + N \Rightarrow \exp J_n(\lambda) = diag(\exp \lambda, ..., \exp \lambda) + \exp N \\ A &= P \bigoplus_{i=1}^{l} J_i P^{-1} \Rightarrow \exp A = P \left(\bigoplus_{i=1}^{l} (\exp J_i) \right) P^{-1}, \ J_i \text{ blocs de Jordan} \end{aligned}$$

Série d'exercices

Exercice 82 *Résoudre le système différentiel suivant* $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' &=& x_1 + 4x_2 \\ x_2' &=& \frac{1}{2} x_1 \end{array} \right.$

Exercice 83 *Même question pour le système*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 84 *Résoudre* $y'' + by' + cy = 0$

Exercice 85 *Résoudre le système des suites récurrentes linéaires donné par*

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 86 *Donner le terme général de la suite récurrente suivante en fonction de ses premiers termes connus.*

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} + 4x_n + 5x_{n-1},\ n \geq 1,\ \textit{avec}\ x_0 = 1 = x_1,\ \ x_2 = 2.$$

Exercice 87 *Soit A une matrice réelle d'ordre 4 telle que*

$$A^3 = 5A - 2I.$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.*
2. *Écrire la forme réduite de Jordan de A.*
3. *En déduire les espaces propres et les espaces caractéristiques de A et leurs dimensions.*
4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire réelle satisfaisant la relation de récurrence*

$$u_{n+3} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0,$$

   et

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0.$$

   Déterminer le terme général u_n en fonction de n et les premiers termes donnés en haut.
5. *Résoudre l'équation differentielle*

$$y^{(3)} - 5y' + 2y = 0.$$

Exercice 88 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer les droites vectorielles invariantes par A.*
2. *Donner* $\exp A$.

Quelques sujets de contrôles de l'algèbre 3

Contrôle d'algèbre 3 (18 Janvier 2017)

Université Larbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Contrôle d'algèbre 3
18 Janvier 2017

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement avec un stylo bleu ou noir. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

1. **Exercice.**(a : 5 points, b : 5 points)

   (a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice A et sa forme réduite de Jordan.

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Résoudre le système d'équations différentielles linéaires

   $$\begin{cases} x'(t) & = & 3x(t) - z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & -x(t) + 3z(t) \end{cases}$$

2 **Exercice.**(a : 1 point, b : 3 points)

   (a) Étant donnée une matrice A d'ordre 3 satisfaisant $A(A - I) = 0$, A est elle diagonalisable ?

   (b) Écrire les formes réduites de Jordan possibles pour la matrice A.

3 **Exercice.**(6 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \neq 0$. Manipuler la matrice A pour obtenir sa puissance A^n en utilisant la forme réduite de Jordan.

Corrigé type du contrôle d'algèbre 3, 2017

Solution de l'exercice 1

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, polynôme caractéristique :$c(X) = (X-2)(X-4)^2$.
(2 points)

Comme $(A-2I)(A-4I) = 0$, alors, le polynôme minimal $m(x) = (X-2)(X-4)$. (2 points)

Il existe une matrice inversible P, telle que la forme réduite de Jordan est alors

$$P^{-1}AP = J(2,1) \oplus J(4,1) \oplus J(4,1) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} = D. \text{ (1 point)}$$

b) Le système linéaire peut être s'écrit sous la forme

$$X'(t) = AX(t). \text{ (1 point)} \tag{1}$$

De la dernière question dans a), la matrice est diagonalisable, donc la matrice de passage P est formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres 2 et 4. Cherchons les vecteurs propres, et la matrice de passage P de la base canonique à la base des vecteurs propres : (2 points $= 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5$)

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4,$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1}AP = D.$$

Ainsi la forme (1) devient

$$X'(t) = AX(t) = PDP^{-1}X(t). \text{ (1 point)}$$

ce qui donne

$$Y' = DY, \text{ avec } X = PY.$$

D'où,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 \exp 2t \\ c_2 \exp 4t \\ c_3 \exp 4t \end{pmatrix}, \text{ avec } c_1,\ c_2 \text{ et } c_3 \text{ sont des constantes.}$$

Par suite, la solution du système est

$$X(t) = (c_1 \exp 2t)\, V_1 + (c_2 \exp 4t)\, V_2 + (c_3 \exp 4t)\, V_3. \text{ (1 point)}$$

Solution de l'exercice 2

a) On a $A(A-I)=0 \Rightarrow \exists\, m(x)=X(X-1)$, tel que $m(A)=0$. A est diagonalisable car, $m(x)$ est un produit des facteurs linéaires de degré 1.(1 point)

b) Comme la matrice A est d'ordre 3, alors le polynôme caractéristique de A est $c_1(X)=X^2(X-1)$ ou $c_2(X)=X(X-1)^2$. Par conséquent, les formes réduites de Jordan possibles sont :

$$J(0,1)\oplus J(0,1)\oplus J(1,1)\,,\text{ ou } J(0,1)\oplus J(1,1)\oplus J(1,1)\,.\ \ (2\text{ points}=1+1)$$

Ainsi, on a respectivement :

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.\ \ (1\text{ point})$$

Solution de l'exercice 3

On prend la matrice transposée de A :

$$A^t=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=J(\lambda,3)\,.\ \ (1\text{ point})$$

On pose :

$$J(\lambda,3)=\lambda I_3+N,\text{ ou } N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.\ \ (1\text{ point})$$

Alors,

$$\left(A^t\right)^n=(\lambda I_3+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}I\times N^k.\ \ (1\text{ point})$$

D'autre part, on a N est nilpotente d'indice 3, i.e. $N^3=0$ et $N^2\neq 0$.
Alors,

$$\left(A^t\right)^n=\lambda^nI+n\lambda^{n-1}N+\frac{n(n-1)}{2}N^2.\ \ (1\text{ point})$$

$$\begin{aligned}\left(A^t\right)^n &= \begin{pmatrix}\lambda^n&0&0\\0&\lambda^n&0\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n\lambda^{n-1}&0\\0&0&n\lambda^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{1}{2}n(n-1)\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}\qquad(1\text{ point})\end{aligned}$$

Par suite,

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \frac{1}{2}n\,(n-1) & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}. \text{ (1 point)}$$

Contrôle de rattrapage d'algèbre 3 (Mars 2017)

Université Larbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Contrôle de rattrapage d'algèbre 3
Mars 2017

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement avec un stylo bleu ou noir. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

<u>Exercice 1</u> (10 points) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a Déterminer $\ker(A+I)$ en déduisant une valeur propre de A.

b À l'aide de $Tr(A)$ et $\det A$, déterminer les autres valeurs propres. A est-elle diagonalisable ?

c Déduire le polynôme caractéristique et la forme réduite de Jordan de A.

d Déduire le polynôme minimal de A (Donc qui calcule le polynôme minimal la réponse sera considérée fausse)

e A est-elle inversible ? Sans calcul, déduire son inverse

<u>Exercice 2</u> (5 points) Soit une suite récurrente réelle donnée par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n,\ u_0 = 1,\ u_1 = 4.$$

À l'aide de la diagonalisation d'une matrice, déterminer le terme général u_n en fonction de u_0 et u_1.

<u>Exercice 3</u>(5 points) Déterminer

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé type du contrôle de rattrapage d'algèbre 3, Mars 2017

Solution de l'exercice 1 (2 points pour chaque question)

a) Détermination de $\ker(A+I)$

$$\ker(A+I) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (A+I)(x,y,z) = 0\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implique la résolution du système

$$\begin{cases} 3x - y + 2z & = & 0 \\ 5x - 2y + 3z & = & 0 \\ -x - z & = & 0 \end{cases}.$$

ce qui donne

$$z = -x = -y,$$

Ainsi

$$\ker(A+I) = vect\{(1,1,-1)\}$$

Comme $\ker(A+I) \neq \{0\}$, alors -1 est une valeur propre de la matrice A (cela provient de la propriété : λ une valeur propre de $A \Longleftrightarrow \ker(A-\lambda I) \neq \{0\}$).

b) Soient $\lambda_1 = -1$, λ_2, λ_3 les trois valeurs propres de la matrice A, alors on a

$$\begin{aligned} -3 &= Tr(A) = -1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ -1 &= \det A = -\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Ainsi, nous allons déterminer les racines du polynôme

$$X^2 - (\lambda_2 + \lambda_3) X + (\lambda_2\lambda_3) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2,$$

ce qui donne

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Comme les valeurs propres ne sont pas distinctes, nous ne savons pas si la matrice est diagonalisable ou non. Pour savoir, il faut chercher les vecteurs propres et s'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$ ou non. D'autre part, nous avons déjà vu dans la question a) que $\ker(A+I) = vect\{(1,1,-1)\}$ ce qui implique que nous avons un seul vecteurs propre de A . Donc la matrice n'est pas diagonalisable.

c) De la question b) en on déduit que le polynôme caractéristique est

$$C(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) = (X+1)^3 .$$

Comme la matrice A n'est pas diagonalisable, alors elle représente une somme directe de bloc de Jordan. Or on a un seul bloc de Jordan $J_3(-1)$, d'où, la forme réduite de Jordan est

$$P^{-1}AP = J_3(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à la base de Jordan (On a pas demandé de calculer la base de Jordan. Si on demande, il suffet de poser $v_1 = (1, 1, -1)$ et de calculer les vecteurs généralisés v_2 et v_3 comme suit :

$$(A+I)v_2 = v_1, \ (A+I)v_3 = v_2.$$

ce qui donne

$$v_2 = (1, 2, 0), \ v_3 = (0, -1, 0)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Comme la matrice A représente un bloc de Jordan d'ordre 3 associé à la valeur propre $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, alors le polynôme minimal de A est $M(X) = C(X)$.

e) Oui, A est inversible car ses valeurs propres ne sont pas nulles (ou bien, on a déjà vue que $\det A = -1$). Appliquons le théorème de Cayley-Hamilton $C(A) = 0$, nous obtenons

$$A^3 + 3A^2 + 3A + I = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -A^2 - 3A - 3I \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

On pose $v_{n+1} = u_n$, pour tout entier n. Ainsi on obtient $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+2} & = & 3u_{n+1} - 2v_{n+1} \\ v_{n+2} & = & u_{n+1} \end{array} \right. , \text{ et } u_1 = 4,\ v_1 = u_0 = 1\ . \tag{5.4}$$

Le système (5.4) se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ v_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui donne à son tour la relation de récurrence : Pour tout entier n,

$$X_{n+2} = A^{n+1} X_1, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Donc on va diagonaliser la matrice A pour obtenir A^{n+2}. Les vecteurs propres et les valeurs propres de A sont

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2.$$

Ainsi nous avons

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 1 & 2 - 2^{n+2} \\ 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^{n+2} - 2 \\ 3 \times 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$u_{n+2} = 3 \times 2^{n+2} - 2 \Longrightarrow u_n = 3 \times 2^n - 2.$$

Vérification :

$$\begin{aligned} u_0 &= 3 \times 2^0 - 2 = 3 - 2 = 1, \\ u_1 &= 3 \times 2^1 - 2 = 6 - 2 = 4. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 Suivez la même méthode de la solution de l'exercice 2, Contrôle d'algèbre 3 (15 Janvier 2018).

Contrôle d'algèbre 3 (15 Janvier 2018)

Université Larbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Contrôle d'algèbre 3
15 Janvier 2018

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement avec un stylo bleu ou noir seulement. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

Exercice 1 (2 points à chaque question) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Peut-on Appliquer le lemme des noyaux ?
3. En déduire les sous-espaces invariants de M.
4. Déterminer le polynôme minimal De M.
5. En déduire La forme réduite de Jordan de M (sans calculer la matrice de passage).
6. En déduire les dimensions des sous-espaces propres de M.
7. Déterminer $M + M^{15} + M^{2018}$.

Exercice 2 (6 points) Déterminer l'exponentielle de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution du contrôle d'algèbre 3, 2018

Je note d'abord que le corrigé type contient des explications pour les étudiants afin de comprendre mieux. (Le but n'est pas de donner un corrigé type de l'examen pour que les étudiants sachent leurs erreurs seulement mais aussi de les aider à réviser leurs cours).

Solution de l'exercice 1 (2 points pour chaque question).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le polynôme caractéristique de M. Mettons la matrice M en blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} c(X) &= \det(XI_5 - M) = \det(XI_3 - A)\det(XI_2 - C) \\ &= X^2 (X-2)(X-1)^2. \end{aligned}$$

2. Oui nous pouvons appliquer le lemme des noyaux en prenant

$$P(X) = c(X),\ P_1(X) = X^2,\ P_2(X) = (X-2),\ P_3(X) = (X-1)^2.$$

   Ainsi,

$$p\gcd(P_1(X), P_2(X), P_3(X)) = 1.$$

   Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $c(M) = 0$, ce qui donne

$$E = \ker P_1(M) \oplus \ker P_2(M) \oplus \ker P_3(M).$$

   Nous pouvons aussi prendre deux polynômes seulement, par exemple $P_1(X)$ et $Q(X) = P_2(X)P_3(X)$ (ou les autres possibilités $P_2(X)$ et $Q(X) = P_1(X)P_3(X)$, $P_3(X)$ et $Q(X) = P_1(X)P_2(X)$). Dans ces cas, E sera la somme directe de deux sous-espaces invariants relativement aux polynômes choisis.

3. Les sous espaces invariants de M sont en plus de l'espace entier E et l'espace trivial $\{0\}$ sont $\ker P_1(M)$, $\ker P_2(M)$ et $\ker P_3(M)$.

4. Le polynôme minimal de M, le polynôme minimal doit contenir tous les facteurs de $c(X)$ avec des multiplicités minimales. Après le calcul, on a

$$m(X) = c(X).$$

5. La forme réduite de Jordan de M (à un ordre près des blocs)

$$P^{-1}MP = J_2(0) \oplus J_1(2) \oplus J_2(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = J.$$

6. Les valeurs propres sont $0, 2, 1$, d'où les espaces propres sont $\ker M$, $\ker(M - 2I_5)$, $\ker(M - I_5)$.

   Comme à chaque valeur propre nous avons un seul bloc de Jordan associé, alors nous déduisons que les dimensions des sous-espaces propres de M sont

$$\dim\ker M = 1,\ \dim\ker(M - 2I_5) = 1,\ \dim\ker(M - I_5) = 1.$$

7. $$M + M^{15} + M^{2018} = P\left(J + J^{15} + J^{2018}\right)P^{-1}.$$

   Donc, il suffet de déterminer J^{15} et J^{2017}, on a $J_2(0)$ est nilpotent d'indice 2, d'où $(J_2(0))^{15} = 0$. Pour tout entier k,nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Par conséquent,

$$\begin{aligned} M^{15} &= (J_2(0))^{15} \oplus (J_1(2))^{15} \oplus (J_2(1))^{15} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 2^{15} & & \\ & & & 1 & 15 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M^{2018} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 2^{2018} & & \\ & & & 1 & 2018 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ M + M^{15} + M^{2018} &= P\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 2 + 2^{15} + 2^{2018} & & \\ & & & 3 & 2034 \\ & & & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)P^{-1}. \end{aligned}$$

<u>**Solution de l'exercice 2**</u> 6 points.

Déterminons e^A, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il suffet de donner e^A en fonction de la matrice de passage P. (ce n'est pas necissaire de calculer P)

Remarquons d'abord que la matrice A est le premier bloc de la matrice M dans l'exercice 1. Donc nous avons le polynôme caractéristique

$$c_A(X) = X^2 (X-2)$$

Alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 2$. Le polynôme minimal est $m(X) = c(X)$. Ainsi la forme réduite de Jordan de A est

$$A = P(J_2(0) \oplus J_1(2)) P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Par suite

$$e^A = P\left(e^{J_2(0)} \oplus e^2\right) P^{-1}.$$

Utilisons l'exponentielle $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ et du fait que $J_2(0)$ est nilpotent d'indice 2, nous avons

$$e^{J_2(0)} = I_2 + J_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$e^A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & e^2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Bibliographie

[1] J. P. Escofier, Toute l'algèbre de la licence, 4th Edition, Dunod, 2000.

[2] Seymour Lipschutz,Algèbre Linéaire, Cours Et Problèmes 600 Exercices Résolus, Temple University Editeur : Mcgraw-Hill, Collection : Série Schaum, 1987.

[3] GILBERT STRANG, Introduction to Linear Algebra, Fifth Edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM, (2016)

[4] Mark Steinberger, A connection between number theory and linear algebra, http ://www.albany.edu/~mark/numlin.pdf, January 31,(2012), 1-15.

[5] Mark Steinberger, Algebra, PWS, (1994), 558 pages.