Unité: Mesure et Intégration
Séries d'exercices (3)

Exercise 1 *Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?*

Exercise 2 *Soit (E, T, m) un espace mesuré*

1. *Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F noteé T_F est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F . On l'appellera la trace de m sur F. Si $m(F) < 1$, cette mesure est finie.*

2. *Soit A une tribu incluse dans T. La restriction de m à A est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?*

Exercise 3 *Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\geq 0} \subset T$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\bigcap A_n) = m(E)$.*

Exercise 4 *Soit (E, T, m)un espace mesur" et $(A_n)_{n\geq 0} \subset T$.*

1. *On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\bigcup_{p\geq n_0} A_{n_0}) < \infty$. Montrer que $m(\liminf A_n) \leq \liminf m(A_n) \leq \limsup m(A_n) \leq m(\limsup A_n)$.*

2. *Donner un exemple (c'est-'a-dire choisir (E, T, m) et $(A_n)_{n\geq 0} \subset T$ pour lequel : $\limsup m(A_n) > m(\limsup A_n)$.*

3. *Donner un exemple avec m finie (c'est-'a-dire $m(E) < \infty$) pour lequel $m(\liminf A_n) > \liminf m(A_n) < \limsup m(A_n) < m(\limsup A_n)$.*

4. *(Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_n m(A_n) < \infty$. Montrer que $m(\limsup A_n) = 0$.*

Exercise 5 *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B de E est dite "négligeable" si elle est incluse dans un ´elément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N; A \in T, N \in \mathcal{N}_m\}$.*

1. *Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $\overline{T} \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.*

2. *Soit $A1, A2 \in T$ et $N1, N2 \in \mathcal{N}_m$ t.q. $A1 \cup N1 = A2 \cup N2$. Montrer que $m(A1) = m(A2)$. Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q.$B = A \cup N$, on pose $\overline{m}(B) = m(A)$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)*

3. *Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{\overline{T}}$ et $\overline{m}_{|T} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égalevà m sur T.*

4. *Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.*

Exercise 6 *Soit E une ensemble contenant au moins deux points et $\Im = \{\emptyset, E\}$ la tribu triviale. Soit la mesure μ définie par $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(E) = 1$*

1. *Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}^*$ des μ^*-extérieurement mesurables*

2. *Montrer que $\mathcal{A}^*$ est la tribu triviale.*

Exercise 7 *Soit $E = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ et $C = \{\emptyset, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_4\}, \{w_3, w_4\}, E\}$. On définit sur C la fonction μ come suit*

$$\begin{aligned} \mu(\{w_1, w_2\}) &= \mu(\{w_1, w_3\}) = \mu(\{w_2, w_4\}) = \mu(\{w_3, w_4\}) = 3 \\ \mu(E) &= 6, \mu(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

Ensuite sur $\mathcal{P}(E)$ on définit les mesures μ_1 et μ_2 par

$$\begin{aligned} \mu_1(\{w_1\}) &= \mu_1(\{w_4\}) = \mu_2(\{w_2\}) = \mu_2(\{w_3\}) = 1, \\ \mu_1(\{w_2\}) &= \mu_1(\{w_3\}) = \mu_2(\{w_1\}) = \mu_2(\{w_4\}) = 2. \end{aligned}$$

Alors montrer que

1. *C n'est pas une tribu*

2. *μ est une mesure sur C*

3. *Les deux mesues μ_1 et μ_2 sont des extensions de la mesure μ sur $\mathcal{P}(E)$*

4. *Construire une mesure extérieure μ^* en fonction de μ définie sur C*

5. *Conclure que $\mu^* \neq \mu_1 \neq \mu_2$.*

Exercise 8 *Soit $E = \mathbb{N}$, $A = \{1, 3, 5, ...\}$ et $C = \sigma(A)$. Soit μ la mesure de comptage sur C et μ_1 et μ_2 deux fonctions définies sur $\mathcal{P}(E)$ par*

$$\mu_1(B) = \text{le nombre de points dans } B \text{ et } \mu_2(B) = 2\mu_1(B)$$

Alors montrer que

1. *μ n'est pas $\sigma-$finie sur C*

2. *Les deux mesures μ_1 et μ_2 sont des extensions $\sigma-$finies de μ*

3. *Determiner une mesure extérieure μ^* en montrant que $\mu^*(B) = \infty$ dès que $B \neq \emptyset$.*

4. *Determiner $\mathcal{A}^*$ la tribu des parties extérieurement mesurables coïncide avec $\mathcal{P}(E)$.*