



امتحان الدورة العادية في مادة الرياضيات 2

التمرين الأول: (05 نقاط)

(1) اوجد حلول المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى التالية :

$$xy' = 3y \quad \text{حيث} \quad y(1) = 2$$

(2) اوجد حلول المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة التالية :

$$y'' + 2y' + y = 3x + 4$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لتكن f, g دالتين ذات متغيرين حقيقيين معرفتان ب

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + xy, \quad g(x, y) = \frac{x+y}{3x-y-1}$$

(1) احسب مايلي : $f(0,0)$, $g(1, -1)$

(2) اوجد ميدان تعريف الدالتين f, g .

(3) احسب المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى و الرتبة الثانية للدالة f .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن المصفوفتان

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث I_2 هي مصفوفة الوحدة.

(1) احسب : $\det(A)$, $Tr(A)$, A^t , A^2 .

(3) احسب : $A^2 - 2A - 3I_2$.

(2) استنتج ان المصفوفة A قابلة للقلب و عين مقلوبها.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

لتكن جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y - z = -2 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$$

(1) اكتب الشكل المصفوفي للجملة.

(2) اوجد حلول الجملة بطريقتين مختلفتين من بين الطرق الثلاث التالية (طريقة كرامر , طريقة غوص , طريقة المقلوب).

اساتذة المقياس



الحل النموذجي لامتحان الدورة العادية في مادة الرياضيات 2

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى قابلة للفصل و منه

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots xy' = 3y \leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x} \leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\leftrightarrow \ln(y) = 3\ln(x) + c \leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{3\ln(x)+c}$$

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots \leftrightarrow y = kx^3.$$

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots y(1) = 2 \leftrightarrow 2 = k \leftrightarrow y = 2x^3.$$

2) المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة شكلها العام

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

و منه فحلها العام هو : $y_G = y_h + y_p$ (0.5 ن).حساب الحل المتجانس

المعادلة المتجانسة المرافقة هي

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots y'' + 2y' + y = 0$$

المعادلة المميزة له هي

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots r^2 + 2r + 1 = 0$$

حيث المميز يساوي الصفر فان المعادلة تقبل حل مضاعف و منه فان

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots y_h = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

حساب الحل الخاصبما ان الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية عبارة عن كثير حدود من الدرجة الاولى و المعامل c لا يساوي 0 فان الحل الخاص عبارة عن كثير حدود من الدرجة الاولى شكله العام هو

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots y_p = a_1x + a_2 \rightarrow y_p' = a_1 \rightarrow y_p'' = 0$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$2a_1 + a_1x + a_2 = 3x + 4$$

بالمطابقة نجد

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots a_1 = 3 \text{ و } a_2 = -2 \rightarrow y_p = 3x - 2$$

و في الاخير نجد ان

$$(0.5 \text{ ن}). \dots \dots \dots y_G = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 3x - 2.$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن f, g دالتين ذات متغيرين حقيقيين معرفتان ب

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + xy, \quad g(x, y) = \frac{x+y}{3x-y-1}$$

(1) احسب مايلي :

(0.5 ن) $f(0,0) = 0$

(0.5 ن) $g(2,1) = \frac{3}{4}$

(2)

• بما ان الدالة f عبارة عن متعدد حدود فان

(0.5 ن) $Df = \mathbb{R}^2$

(0.5 ن) $Dg = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 3x - y - 1 \neq 0\}$ •
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y \neq 3x - 1\}$

فان ميدان تعريف الدالة g هي جميع نقاط المستوي ماعدا نقاط المستقيم ذو المعادلة $y = 3x - 1$ (0.5 ن)

(3)

(0.25 ن) $f'_x = 3x^2 + 2x + y$ •

(0.25 ن) $f'_y = 3y^2 + x$ •

(0.25 ن) $f''_{xx} = 6x + 2$ •

(0.25 ن) $f''_{xy} = 1$ •

(0.25 ن) $f''_{yy} = 6y$ •

(0.25 ن) $f''_{yx} = 1$ •

التمرين الثالث : (05 نقاط)

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ حيث } I_2 \text{ هي مصفوفة الوحدة}$$

(1) احسب : .

(0.5 ن) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ •

(0.5 ن) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ •

(0.5 ن) $Tr(A) = 1 + 1 = 2$ •

(0.5 ن) $\det(A) = 1 - 4 = -3$ •

(3) احسب :

(0.5 ن) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$(0.5 \text{ ن}). \dots\dots\dots 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(0.5 \text{ ن}). \dots\dots\dots A^2 - 2A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) لدينا

$$(0.5 \text{ ن}). \dots\dots\dots A^2 - 2A - 3I_2 = 0_M \leftrightarrow A \frac{1}{3}(A - 2I) = I_2$$

ومنه فان المصفوفة قابلة للقلب حيث

$$(0.5 \text{ ن}). \dots\dots\dots \frac{1}{3}(A - 2I) = A^{-1}$$

اذن

$$(0.5 \text{ ن}). \dots\dots\dots A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

التمرين الرابع : (06 نقاط)

يختار الطالب طريقتين من بين ثلاث الطرق كل طريقة على 2.5 ن

لتكن جملة المعادلات التالية :

(1) الشكل المصفوفي هو $AX = B$ حيث

$$(01 \text{ ن}). \dots A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• طريقة كرامر :

لدينا $n = m = 3$ و

$$(1 \text{ ن}). \dots\dots\dots \det(A) = 5 \neq 0$$

و منه الجملة قابلة للحل بطريقة كرامر

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{9}{5}; \dots\dots\dots (0.5 \text{ ن})$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{5} \dots\dots\dots (0.5 \text{ ن});$$

$$z = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{2}{5}; \dots\dots\dots (0.5 \text{ ن})$$

• طريقة المقلوب : $X = A^{-1}B$ (0.5 ن)

حساب A^{-1}

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^t, \tilde{A} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

و منه

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

• طريقة غوص : الشكل المصفوفي الموسع هو

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

العمليات الاولية هي كالاتي

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (\text{جمع العمود السطر الاول و الثاني})$$

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right) \quad (3\text{-السطر الثاني}+2\text{السطر الثالث})$$

و منه حل الجملة مكافئ لحل الجملة

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2y - z = 0 \\ 5z = 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots x = \frac{9}{5}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{2}{5}$$

