حل امتحان : نظرية الاحتمالات (س2)

****

❖ : **تمرين 1 (6 نقاط)**

1- متى تتساوى التوافيق مع التراتيب ؟	**الجواب :** في حالة واحدة المجموعة المسحوبة عنصرواحد : $C_n^1 = A_n^1$
2- ماذا وعني بالحوادث الشرطية ؟	**الجواب :** تحقق حادث يكون مشروط بتحقق حادث أخر قبله
3-نقوم برمي قطعتي نرد مرة واحدة ما هو احتمال الحصول على مجموع يساوي 6 أو 14؟	**الجواب :** $P(X=6)+P(X=14)=\frac{5}{36}+\frac{0}{36}=\frac{5}{36}$
4-ما هو التوزيع الذي تتساوى فيه مميزاته العددية(توقع و تباين)؟	**الجواب:** التوزيع البواسوني $E(X)=V(X)=\lambda$

5-1- بفرض انه لدينا التابع التالي :

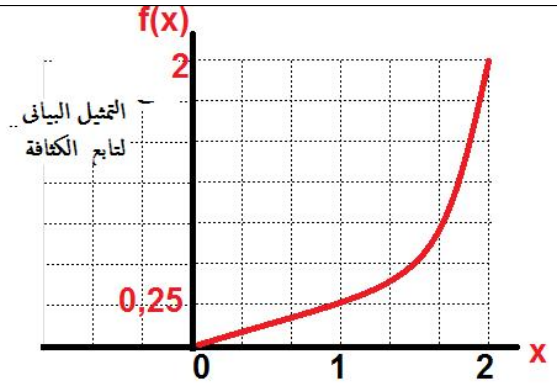
$$f(x)=\begin{cases} C\,x^3 \;; & 0 \le x \le 2 \\ 0 \;; & \text{for all} \end{cases}$$

أ-حدد قيمة C حتى يصبح التابع المعطى تابع كثافة ثم مثله بيانيا (في الشكل المقابل) <-------

ب -. أدرج تابع التوزيع الاحتمالي و مثله بيانيا (أدناه).

- تابع الكثافة هو :

$$(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}\,x^3 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{for all} \end{cases}$$

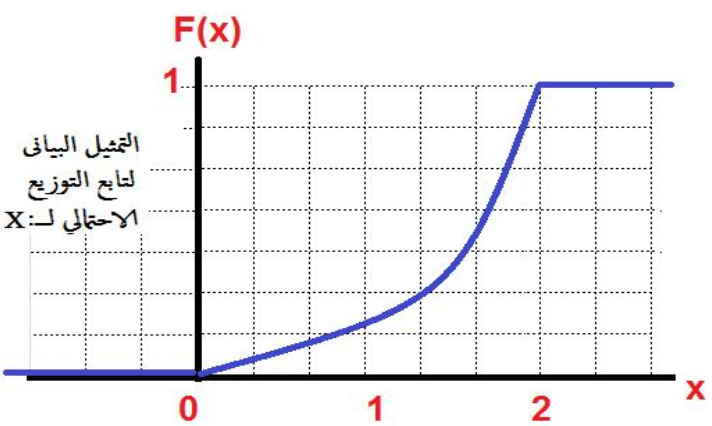


الحل : تحديد قيمة C (هنا) : $\int c.x^3 dx = 1 \Rightarrow \frac{c.x^4}{4} = 1 \Rightarrow 16c = 4 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$

حل :ب-(هنا)

تابع التوزيع الاحتمالي :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{16}\,x^4 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



❖ **تمرين 2: (3 نقاط)**

لنفرض أن مناقش لمذكرة من 100 صفحة ، وجد بها 110خطأ مطبعي موزعة بصورة عشوائية . فتح المناقش ، و بصورة عشوائية المذكرة على صفحة ما .

المطلوب : ما هو احتمال وجود بهذه الصفحة : ا- صفر خطأ ، ب - خطأ واحد ج – خطأين و اكثر .

الحل :

تمريين تمت مناقشته و معالجته و حله في المحاضرة .

باعتبار التوزيع توزيع بواسوني و لنحدد : (1.1 = 110/100 =) ومنه :

$$P(X=0)=\frac{1{,}1^{0}}{0!}e^{-1{,}1}=0{,}333 \quad ,$$

$$P(X=1)=\frac{1{,}1^{0}}{0!}e^{-1{,}1}=0{,}366$$

$$P(X\geq 2)=1-\left[P(X=1)+P(X=0)\right]=0{,}301$$

❖ **تمرين 3: (4 نقاط)**

للوصول إلى مكان عمله، يمكن للعامل أحمد ، أن يختار بين أربعة خطوط حافلات: A وB و C وD .احتمال اختيار هذا العامل للخط A، B، C هو (على التوالي) 1/3 ، 1/4 ، 1/12 و احتمال الوصول إلى العمل متأخرًا على الخط A، B، C هو (على التوالي) 1/20 ، ، 1/10 ، 1/5 . لكن باستخدام الخط D، **لا يتأخر الشخص أبدًا.**

- (1) ما هو احتمال أن يختار العامل الخط D
- (2) -ما هو احتمال ان يصل العامل متأخرا إلى عمله ؟
- (3) احسب احتمال أن يختار العامل الخط C، مع العلم أنه قد وصل متأخراً .

4-احسب احتمال ان يختار العامل الخط D ، مع العلم أنه قد وصل متأخراً .

الحل :

الحل و بالتفصيل تم إدراجه في حل الواجب المنزلي . (يمكن الرجوع إليه و الإطلاع في الموودل او اليوتيب)

احتمال اختيار الخط D

$$P(D)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=$$

نقوم بتوحيد المقامات ومنه :

$$P(D)=\frac{12}{12}-\frac{8}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

و نعرف أن الصيغة العامة للاحتمال الكلي هي :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)$$

و عليه فإن احتمال ان ا ن يصل العامل متأخر إلى عمله هو

$$P(R)=\left(\frac{1}{20}x\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{10}x\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}x\frac{1}{12}\right)+\left(0x\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{120}$$

- (3) احسب احتمالية أن يختار الشخص الخط C، مع العلم أنه قد وصل متأخراً.بمعلومية الصفة و هي انه وصل متأخر فإننا نكون بصدد قاعدة بايز

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i).P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)}$$

و باستخدام الرموز المعتمدة في التمرين و الفضاءات الثلاثة يكون لدينا ما يلي :

$$P(C/R)=\frac{P(C).P(R/C)}{P(R)}$$

و بإجراء عملية التعويض بمعطيات المسألة نجد :	$P(C/R)=\dfrac{\frac{1}{5}x\frac{1}{12}}{\frac{7}{120}}=\dfrac{2}{7}$

ملاحظة : السؤال الرابع من هذا التمرين جاء كما يلي :

4-احسب احتمال ان يختار العامل الخط D ، مع العلم أنه قد وصل متأخراً.

الجواب : جاء بالنص انه إذ استخدم العامل الخط D لن يصل متأخرا أبدا . و بالتالي مستحيل لن يكون قد سلك هذا الخط , إذا وصل متأخرا فهذا يعني أنه سلك خط أخر غير D .

❖ تمرين 4: (7 نقاط)

يحتوي كيس على 4 قريصات خضراء و 3 قريصات حمراء (القريصات من نفس الحجم و لا يمكن معرفة اللون عند اللمس) .قمنا بإجراء 3 سحبات متتالية و بشكل عشوائي ،وفق الحالتين التاليتين : سحب دون إعادة و سحب مع الإعادة .

- **الحالة الأولى : سحب دون إرجاع (أو دون إعادة) .**

بفرض أن م.ع X يمثل اللون الأخضر :

1- أدرج جدول التوزيع الاحتمالي لـ: م,ع, X و مثله بيانيا (على ورقة الأسئلة)

2 – أدرج تابع التوزيع للمتغير العشوائي X و مثله بيانيا (على ورقة الأسئلة)

3– أحسب كلا من التوقع الرياضي و التباين لهذا المتغير العشوائي X.

- **الحالة الثانية : سحب مع الإعادة (مع الإرجاع) .**

4- ما هو احتمال سحب ، على الأكثر ، 2 قريصات خضراء (سحب مع الإعادة)

5 – أحسب كلا من التوقع الرياضي و التباين X بدلالة الحالة الثانية (سحب مع الإعادة) .

❖ **<u>ملاحظة</u> : الإجابة عن السؤال 1 و 2 من هذا التمرين (التمرين 4) تكون في المخطط المخصص لهما أدناه مع إكمال مكونات الشكل (رمز المحاور، و الوحدات) . مع تفضيل (إن أمكن) استخدام لون غير اسود (في الشكل) للإيضاح .**

الحل :

هو الواجب المنزلي 2 و باختصار جدا في الأرقام (و قد تم حله وتم إدراجه على الموودل و اليوتيب)، و إليكم الحل :

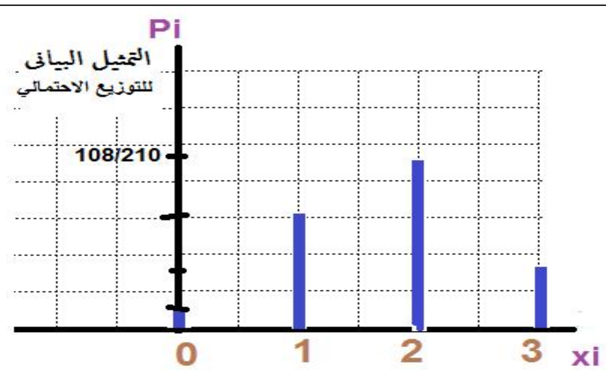
ا- السحب دون الإعادة

هنا الحوادث غير مستقلة ، **الكرات غير مرقمة** و بالتالي هناك طريقة و احدة للحل و هي الصحيحة

(عدم ترقيم الكرات يؤدي إلى استبعاد طريقة التراتيب في الحل)

$P(V_0)=\frac{3}{7}\ x\ \frac{2}{6}\ x\ \frac{1}{5}=\frac{6}{210}$	$P(V_1)=3.\left(\frac{4}{7}\ x\ \frac{3}{6}\ x\ \frac{2}{5}\right)=\frac{72}{210}$
$P(V_2)=3.\left(\frac{4}{7}\ x\ \frac{3}{6}\ x\ \frac{3}{5}\right)=\frac{108}{210}$	$P(V_3)=\frac{4}{7}\ x\ \frac{3}{6}\ x\ \frac{2}{5}=\frac{24}{210}$

xi	0	1	2	3
pi	6/210	72/210	108/210	24/210



$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 6/210 & 0 \leq x < 1 \\ 78/210 & 1 \leq x < 2 \\ 186/210 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$E(X) = (0 \text{ x } \frac{6}{210}) + (1 \text{ x } \frac{72}{210}) + (2 \text{ x } \frac{108}{210}) + (3 \text{ x } \frac{24}{210}) \approx 1{,}71$$

$$V(X) = \sum_i p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

$$\sum p_i\, x_i^2 = (0 \text{ x } \frac{6}{210}) + (1 \text{ x } \frac{72}{210}) + (4 \text{ x } \frac{108}{210}) + (9 \text{ x } \frac{24}{210}) \approx 3{,}43$$

$$V(X) = \sum_i^4 p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

$$= 3{,}43 - (1{,}71)^2 = 3{,}43 - 2{,}92 = 0{,}505 \approx 0{,}51$$

ب - السحب مع الإعادة :

سحب على الأكثر 2» قريصات خضراء يعني و لا واحدة او واحدة او إثنتين .

هنا الحوادث اصبحت مستقلة و توفرت شروط التوزيع الثنائي :

$$B(n\,,\,p) \rightarrow B\left(3\,,\,\frac{4}{7}\right)$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

طبعا يمكننا ايضا اعتماد المتمم اي :

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X = 3)$$

$$= 1 - \left\{C_3^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^0\right\} = 1 - \left\{1 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot 1\right\} = 1 - \frac{64}{343} = 0{,}8134$$

التوقع الرياضي هو ناتج جداء المعلمتين :

$$E(X) = n.\,p = 3 \text{ x } \frac{4}{7} = \frac{12}{7} = 1{,}7143$$

اما التباين فيساوي إلى :

$$V(X) = n.p.q = 3 \text{ x } \frac{4}{7} \text{ x } \frac{3}{7} = \frac{36}{49} = 0{,}7347$$